

GFAS (Geotechnical and F.E.M. Analysis System)

Part I	Introduzione	1
1	Overview	1
2	Capacità di analisi	2
Part II	Generazione della mesh di calcolo	4
1	Introduzione	4
2	Generazione della mesh strutturata	6
	Regione di forma quadrangolare	6
	Tecnica di mappatura	7
	Reticolo automatico	9
	Divisione in elementi quadrangolari	9
	Triangolazione di Delaunay	10
	Legami tra regioni	11
3	Generazione della mesh non strutturata	13
4	Modificare la mesh	16
	Infittimento della mesh	16
	Infittimento locale.....	16
	Infittimento globale.....	16
	Cancellare gli elementi del reticolo	18
	Rinumerazione dei nodi	18
	Trasformazione del reticolo (p-refinement)	18
Part III	Formulazione delle matrici e dei vettori degli elementi per problemi elastici	19
1	Equazioni indefinite di equilibrio	20
2	Condizioni al contorno	21
3	Relazioni Deformazioni-Spostamenti	22
4	Formulazione generale della matrice delle rigidzze	23
	Stato di deformazione piana	26
	Stato di tensione piana	26
	Stato assialsimmetrico	26
5	Tipologie di elementi finiti	28
	Triangolo a deformazione costante (CST, T3)	29
	Triangolo a deformazione lineare (LST, T6)	32
	Elemento Quadrangolare Lineare (Q4)	33
	Elemento quadrangolare quadratico (Q8)	34
6	Integrazione numerica degli elementi finiti	35
7	Calcolo delle deformazioni	37
8	Carichi nodali costanti	41
	Le forze di volume	42
	La distribuzione delle forze	43
	Carichi da Tensioni e Deformazioni iniziali	44
	Pressioni neutre	44
	Forze di scavo	46
	Peso gravitazionale	47
9	Strategie di Assemblaggio e Memorizzazione	48
10	Incorporazione delle condizioni al contorno	48

Metodo esplicito per le BC's	48
Ottimizzazione vincolata (metodo di penalizzazione)	49
Supporto elastico	49
11 Risoluzione delle equazioni di equilibrio	49
Part IV Formulazione degli elementi	
Trave-Pilastro	50
1 Barre o chiodi	50
2 Elemento trave-pilastro a due nodi	52
3 Unione di una trave con un elemento piano. Elementi dissimili	57
Elemento trave connesso ad un elemento piano	57
Elemento chiodo connesso ad un elemento piano	59
Gli elementi "bulloni"	64
Bulloni ancorati all'estremità	64
Bullone completamente vincolato	68
Gli elementi lineari	69
Le geogriglie	70
Part V Formulazione dell'analisi non lineare	71
1 Comportamento anelastico tensione-deformazione	71
Criterio di resistenza	71
Legge del flusso plastico	72
Legge di incrudimento	73
2 Relazioni Tensione-Deformazione incrementali	74
3 Criteri di rottura	75
Il criterio di Von-Mises	75
Il criterio di Mohr Coulomb e di Tresca	77
4 Procedure elasto-plastiche	78
Metodo delle rigidzze costanti	79
Generazione di carichi auto-equilibrati	80
Metodo delle deformazioni iniziali	81
Metodo delle tensioni iniziali	84
Procedura risolutiva	85
Metodo delle rigidzze tangenti	86
Integrazione delle relazioni costitutive. Matrice tangente costante	89
Procedura risolutiva	91
Part VI Analisi dello stato stazionario	93
1 Metodo di analisi in GFAS	96
2 Esempio di calcolo	97
Part VII Condizioni iniziali	101
1 Condizione iniziale delle acque sotterranee	101
2 Tensioni geostatiche iniziali	103
Part VIII Analisi dinamica e sismica	104
Part IX Practical Approach	106
1 Analisi di stabilità dei pendii	106
Fattore di sicurezza (FS) e riduzione del fattore di resistenza (SFR)	107
Proprietà dei materiali	107

Crollo del pendio	108
Esempi di calcolo	108
Caso 1: analisi di stabilità di pendio.....	108
Caso 2: interscambio Slope-GFAS.....	112
Caso 3: Interazione Terreno Struttura.....	116
Caso 4: Filtrazione.....	124
2 Analisi a capacità portante	125
3 Analisi per fasi di costruzione	129
Part X Tutorial & DXF	130
Part XI Materiali	133
1 Il materiale per gli elementi finiti lineari	133
2 Il materiale per gli elementi finiti piani	135
Part XII Tipo di analisi	138
Part XIII Template	141
Part XIV Bibliografia	141
Part XV Geoapp	142
1 Sezione Geoapp	142
Part XVI Libri consigliati	143
Part XVII Contatti	147
Index	0

1 Introduzione

1.1 Overview

GFAS è un software basato sulla risoluzione di metodi agli elementi finiti, sviluppato principalmente per condurre sia l'analisi delle deformazioni sia l'analisi di stabilità, fondamentali per la risoluzione dei problemi tipici dell'ingegneria geotecnica. **GFAS** è un semplice quanto potente strumento per l'ingegneria geotecnica e consente di effettuare analisi lineari e non di mezzi omogenei o eterogenei in cui il modello del suolo viene utilizzato per simulare il comportamento dei terreni. È caratterizzato da un'interfaccia grafica completa per la pre-elaborazione o post-elaborazione, risolvendo metodi agli elementi finiti (*FEM*) per solidi bidimensionali. L'interfaccia grafica permette una rapida generazione di metodi complessi agli elementi finiti. Le analisi sono totalmente automatiche e basate su robuste procedure numeriche.

Il programma include:

- Input grafico per la creazione del modello geometrico:

l'inserimento degli strati di suolo, dei carichi e delle condizioni al contorno è basato su procedure di disegno CAD, che consentono la modellazione dettagliata della geometria del contorno. Il modello geometrico permette facilmente la generazione del reticolo di calcolo ad elementi finiti bidimensionali.

- Generazione automatica della mesh:

GFAS consente di creare automaticamente la mesh strutturata e non ad elementi finiti bidimensionali. Il programma contiene, infatti, un generatore automatico del reticolo che semplifica la costruzione del modello ad elementi finiti: sono disponibili elementi sia triangolari (a 3 o 6 nodi) sia quadrangolari (a 4 o 8 nodi).

- Elementi di ordine superiore:

per la modellazione delle deformazioni e delle tensioni indotte nel suolo, il programma mette a disposizione elementi quadratici a 6 e 8 nodi triangolari e quadrangolari.

- L'ottimizzazione della larghezza di banda della matrice

per ridurre la memoria del computer occupata e il tempo di calcolo, può essere eseguita dal programma usando la rimunerazione interna del sistema di equazioni.

- Fasi di costruzione:

il programma consente di creare e analizzare complessi modelli multi-stage come fori, scavi, rilevati, rinforzi etc..

- Travi-Pilastr:

il programma offre un ampio gamma di elementi a supporto delle opzioni di modellazione come ad esempio elementi lineari, ancoraggi e geotessili. Le travi, con le teorie di Bernoulli e di Timoshenko, sono incorporate nel codice di calcolo e sono, pertanto, a disposizione dell'utente per creare complessi modelli ad elementi finiti in cui sia elementi piani sia lineari interagiscono fra loro. Gli elementi lineari possono essere utilizzati per la modellazione di tunnel rivestiti o di paratie. L'elemento chiodo può essere sia ancorato all'estremità sia completamente vincolato. In particolare, questi elementi possono essere assegnati ovunque nella mesh di calcolo.

- Analisi del flusso stazionario:

le pressioni interstiziali sono determinate sia in presenza di pozzi sia di flusso, il gradiente è definito in funzione della condizione idraulica al contorno che l'utente inserisce, e in funzione della permeabilità dei materiali presenti. Le pressioni interstiziali sono automaticamente inserite nell'analisi delle tensioni agli elementi finiti.

- Analisi dinamica e sismica:

il Software consente all'utente di condurre l'analisi dinamica, determinando gli autovalori e gli autovettori e valutando di conseguenza le azioni sismiche secondo l'Eurocodice 8.

- Modelli per materiali con comportamento elasto-plastico:

nella versione attuale si utilizzano i seguenti modelli: Mohr-Coulomb e Von-Mises, che possono essere entrambi applicati agli elementi piani con comportamento elasto-plastico. Entrambi, ben noti nella pratica ingegneristica, sono modelli semplici e robusti, e basati sui parametri caratteristici del suolo.

1.2 Capacità di analisi

L'obiettivo generale di **GFAS** è quello di fornire gli strumenti analitici necessari alla valutazione delle deformazioni e delle tensioni delle strutture piane a sostegno diretto delle analisi geotecniche.

Il programma prevede tre tipologie basilari di analisi:

- L'Analisi lineare elastica

che può essere utilizzata per eseguire l'analisi ad elementi finiti di una membrana o ogni altra geometria soggetta a tensione piana, deformazione piana o tensione e deformazione assialsimmetrica. Le

condizioni di tensione e deformazione piana sono due stati di tensione bidimensionali simili. Quando le forze sono applicate su una piastra sottile bidimensionale sul suo stesso piano, lo stato delle tensioni e delle deformazioni è chiamato stress piano. Un esempio tipico è quello delle pareti di taglio che, essendo assimilabili ad una piastra sottile, presenteranno principalmente tensioni nel piano. Non sono previste restrizioni per le deformazioni al di fuori di esso. D'altra parte, un solido prismatico soggetto a carico costante normale al suo asse può essere analizzato come una sezione bidimensionale di lunghezza infinita e spessore unitario evidenziando una deformazione piana.

- **L'analisi a capacità portante**

si effettua valutando la risposta di un materiale, con comportamento non lineare, sottoposto ad un carico. Imposte quindi le condizioni di deformazione piana, al fine di monitorare il comportamento elasto-plastico, i carichi sono applicati in maniera incrementale. Il metodo effettua le iterazioni con valori di rigidità costante, cosicché il processo di fattorizzazione della matrice delle rigidità, che si presenta relativamente lungo, è chiamato soltanto una volta, mentre la fase di sostituzione all'indietro è richiamata ad ogni iterazione. Sono stati implementati diversi criteri di rottura per descrivere la resistenza dei terreni: per suoli dotati di attrito e coesione è appropriato l'utilizzo del criterio di Mohr Coulomb, mentre per argille non drenate può essere utilizzato il criterio di Von-Mises.

- **L'analisi di stabilità di versante**

viene effettuata dal software riducendo, in modo graduale, i parametri caratteristici dei terreni finché la convergenza del metodo non fallisce. Si valuta il fattore di sicurezza (FS), definito come il rapporto che intercorre tra la tangente dell'angolo d'attrito interno e la coesione: i parametri sono, quindi, ridotti per ottenere il fallimento del criterio mantenendo costante il carico gravitazionale. Questo procedimento è del tutto opposto a quello che si effettua nell'analisi a capacità portante in cui, invece, la rottura viene indotta aumentando i carichi ma mantenendo costante i parametri dei materiali. Il programma fornisce, inoltre, informazioni sulle deformazioni allo stato di esercizio ed è inoltre in grado di monitorare la progressiva rottura includendo la rottura a taglio complessiva. La versione attuale è applicabile solo in caso di problemi bidimensionali con deformazione piana. Sia il modello costitutivo di Mohr Coulomb che di Von Mises possono essere adoperati per descrivere le proprietà di resistenza dei terreni e delle rocce. I carichi gravitazionali sono generati in maniera automatica e applicati al versante in un singolo incremento. I parametri di resistenza del terreno che vengono utilizzati nell'analisi elasto-plastica sono ricavati come:

$$\Phi_f = \arctan(\tan \Phi / SRF)$$

$$c_f = c / SRF$$

dove SRF è il fattore di riduzione della resistenza. Diversi valori crescenti del SRF si ottengono finché l'algoritmo non fallisce la convergenza, e a quel punto il fattore SRF determinato si assume come un fattore di sicurezza. In realtà ciò significa che nessuna configurazione delle distribuzioni delle sollecitazioni raggiunta è in grado di soddisfare il criterio di rottura e determinare l'equilibrio globale. La non convergenza entro un dato numero di iterazioni (specificate dall'utente) è adatta a essere un chiaro indicatore dell'instabilità del versante da associare all'incremento degli spostamenti. Solitamente il valore del massimo spostamento nodale a rottura manifesta una notevole variazione rispetto a quello precedente al fallimento della convergenza.

- **L'analisi per fasi di costruzione**

si compie incrementando, da 0 ad 1, i carichi in ogni fase di costruzione. In questo modo, se si raggiunge il valore unitario, la fase di costruzione corrente è completa e termina in modo da passare alla prossima fase di costruzione. Se il calcolo si conclude quando il valore del carico è inferiore ad 1, il programma arresta l'analisi perché si è verificato il meccanismo di rottura.

2 Generazione della mesh di calcolo

2.1 Introduzione

Il metodo agli elementi finiti richiede la suddivisione della regione in analisi in diverse sub-regioni. Le piccole regioni sono elementi connessi con gli elementi adiacenti mediante i nodi. La generazione del reticolo è una procedura che avviene in funzione dei dati geometrici degli elementi e dei loro nodi, si inseriscono, infatti, le coordinate dei nodi e si definiscono i legami per procedere alla costruzione degli elementi.

Un'opportuna modellazione del dominio è il presupposto essenziale per un'accurata analisi agli elementi finiti ed è per questo che la generazione della mesh assume un'importanza fondamentale nel metodo. Un reticolo con elementi triangolari o quadrangolari isoparametrici viene generato in modo automatico dal *Software* e ottimizzato durante l'analisi. L'utente

può specificare la spaziatura della griglia utilizzata sia nella direzione X sia Y.

Chiaramente più fitta sarà la griglia di calcolo, maggiore sarà l'accuratezza del metodo. Tuttavia, il tempo necessario per condurre l'analisi è funzione del numero degli elementi finiti, perciò più fitta è la griglia, maggiore sarà il tempo di calcolo impiegato per compiere l'analisi. **GFAS** utilizza due tipologie di elementi finiti per la generazione della mesh di calcolo: mesh strutturata, che richiede un'iniziale forma o grossolana partizione del dominio, o mesh non strutturata, che effettua una triangolazione automatica del dominio.

Seguendo il primo approccio il dominio viene suddiviso in un numero esiguo di blocchi. Ogni blocco deve avere una forma quadrangolare ad 8 nodi. La tecnica di mappatura genererà il reticolo all'interno dei blocchi.

Nel secondo approccio la mesh è generata per una regione di forma arbitraria semplicemente definendone il contorno e utilizzando il comando della generazione automatica del reticolo. Con questo metodo possono essere rappresentate sia superfici curve sia piane. L'utente può generare una mesh grossolana che può comunque essere infittita successivamente utilizzando gli strumenti messi a disposizione dal programma. Il programma consente di effettuare sia la rimozione sia la rinumerazione degli elementi della mesh.

Durante la fase della generazione del reticolo non è richiesta la scelta della tipologia di elemento da utilizzare. In questa fase, soltanto la classe dell'elemento è importante, cioè se gli elementi sono triangolari o quadrangolari. Per esempio una mesh generata con elementi triangolari a 3 nodi può essere in seguito convertita in elementi triangolari di ordine superiore a 6 nodi.

Nel definire l'analisi da condurre è necessario specificare se gli elementi siano soggetti a tensioni assialsimmetriche, a tensioni o deformazioni piane. **GFAS** è dotato di una serie di procedure basilari per la generazione del reticolo di calcolo:

- Generazione automatica della mesh in elementi T3, T6, Q4 e Q8.
- Rinumerazione dei nodi della mesh con l'algoritmo di invertimento Cuthill-McKee per T3, T6, Q4 e Q8.
- Trasformazione degli elementi finiti semplici T3 e Q4 in elementi di ordine superiore T6 e Q8.
- Ricognizione dei dati geometrici e dei materiali: in seguito alla generazione della mesh, le proprietà dei tipi di materiali (per ogni elemento finito) e la suddivisione della regione possono essere ancora manipolate.
- Infittimento della mesh disponibile per ogni tipologia di elemento finito T3, T6, Q4 e Q8.

- Eliminazione degli elementi finiti selezionati in modo da poter ottenere geometrie complesse.

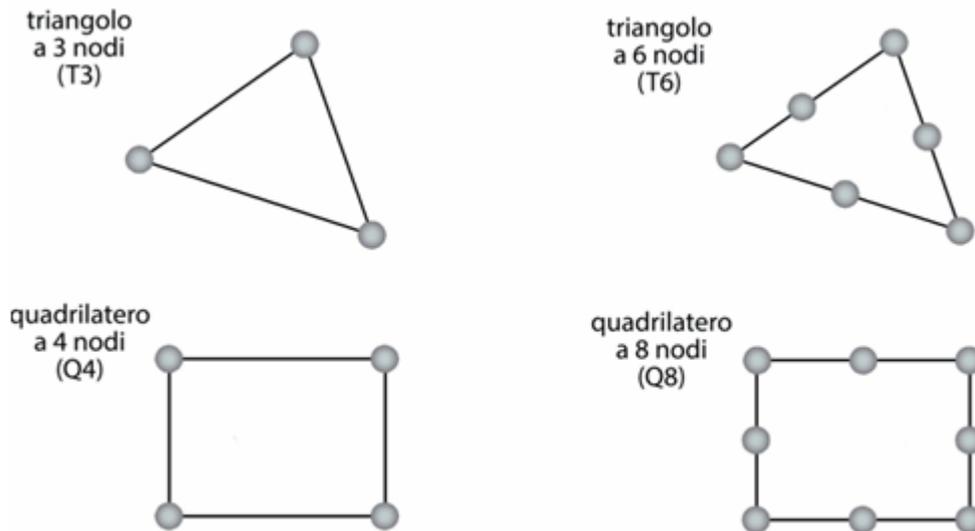


Fig.1. Tipologie di elementi utili alla generazione della mesh.

2.2 Generazione della mesh strutturata

2.2.1 Regione di forma quadrangolare

La generazione della mesh strutturata per domini bidimensionali inizia con la suddivisione del corpo considerato in regioni di forma triangolare o quadrangolare. Queste stesse regioni sono poi suddivise a loro volta in elementi finiti di forma triangolare o quadrangolare.

La suddivisione in regioni solitamente viene effettuata in corrispondenza di cambio di geometria o di proprietà dei materiali. GFAS utilizza un gruppo di regioni ad 8 nodi per definire il dominio considerato, essendo capace di modellare domini bidimensionali composti da triangoli o rettangoli che hanno contorni di forma parabolica. I nodi degli elementi sono numerati e l'ottimizzazione della larghezza della banda della matrice per ridurre la memoria del computer occupata e il tempo di calcolo può essere effettuata dal programma sfruttando la rinumerazione interna del sistema di equazioni. La regione disponibile in GFAS è quella quadrangolare quadratica. Questo elemento è versatile e può essere utilizzato come un rettangolo, un elemento quadrangolare generico o un triangolo come mostrato nella

Figura 2. Due lati dell'elemento quadrangolare possono essere usati per definire un lato della regione triangolare. Gli otto nodi che definiscono la regione devono essere numerati come mostrato nella Figura 2. Il nodo 1 è sempre quello corrispondente alla coordinata $\xi = \eta = -1$. Si noti come

uno dei nodi all'angolo (ad esempio il nodo 5) deve essere sempre contenuto nell'ipotenusa della regione triangolare. La regione è così suddivisa utilizzando la tecnica di mappatura per elementi triangolari e quadrangolari.

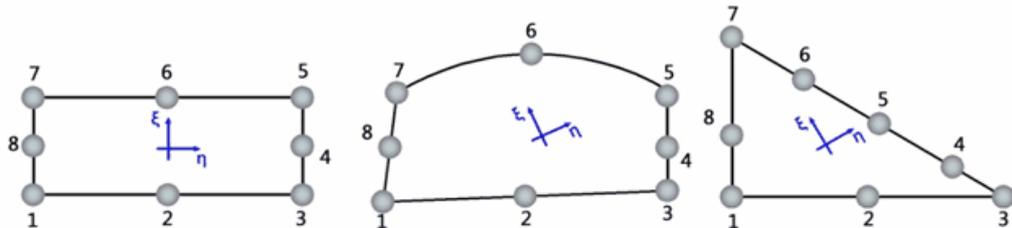


Fig. 2. Possibili configurazioni per le regioni quadrangolari. Numerazione dei nodi.

2.2.2 Tecnica di mappatura

La tecnica di mappatura consente di trasformare una regione 'genitore' con spaziatura regolare della griglia, in una regione di forma arbitraria. Considerando una superficie unitaria, la regione può essere rappresentata avente 4 lati e quattro angoli (Figura 3):

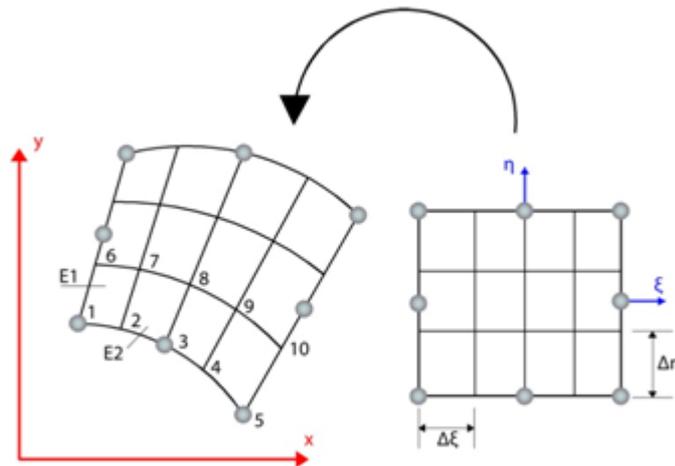


Fig.3. Generazione del reticolo di calcolo con la tecnica di mappatura.

Se si suppone di voler generare un reticolo quadrangolare all'interno di un dominio che ha una forma quadrangolare del secondo ordine, è opportuno utilizzare la tecnica di mappatura come mostrato nella Figura 3. Se ciascun lato del dominio quadrangolare curvilineo può essere approssimato con una parabola, allora il dominio si presenta come un elemento isoparametrico ad 8 nodi. Il dominio è rappresentato come un quadrato nelle coordinate locali $\xi \eta$. Il quadrato in coordinate $\xi \eta$ è diviso

in elementi rettangolari così le coordinate dei nodi sono riconvertite nel sistema di coordinate globali $x y$.

L'algoritmo del calcolo delle coordinate per i nodi interno al dominio è dato da:

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{i-1}{n_\xi + 1} + 1 \\
 C &= \text{mod}((i-1), (n_\xi + 1)) + 1 \\
 \Delta\xi &= \frac{2}{n_\xi}; \quad \Delta\eta = \frac{2}{n_\eta} \\
 \xi &= -1 + \Delta\xi(C-1) \\
 \eta &= -1 + \Delta\eta(R-1) \\
 x &= \sum N_k(\xi, \eta)x_k \\
 y &= \sum N_k(\xi, \eta)y_k
 \end{aligned} \tag{1}$$

Dove n_ξ e n_η rappresentano il numero degli elementi in direzione rispettivamente ξ e η , e con le funzioni di forma N_k definite in coordinate locali $\xi \eta$ ($-1 \leq \xi \leq 1$; $-1 \leq \eta \leq 1$) come:

(a) per elementi bilineari:

$$N_k(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi_k \xi)(1 - \eta_k \eta), \quad (\xi_k, \eta_k) = (\pm 1, \pm 1), \quad k=1, 2, 3, 4 \tag{2}$$

(b) per elementi quadratici:

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(\xi + \eta + 1) \\
 N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\
 N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1) \\
 N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \\
 N_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1) \\
 N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\
 N_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(\xi - \eta - 1) \\
 N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2)
 \end{aligned} \tag{3}$$

2.2.3 Reticolo automatico

La regione può essere suddivisa in elementi triangolari o quadrangolari considerando 4 nodi in modo da formare un elemento quadrangolare così come mostrato nella Figura 4.

Ci sono due tipi di *triangolazione automatica* per la generazione del reticolo, per esempio la suddivisione in forme quadrangolari e la tecnica di Delaunay.

Si possono selezionare elementi di ordine lineare o quadratico: elementi lineari (triangoli a 3 nodi o elementi quadrangolari a 4 nodi) ed elementi quadratici (triangoli a 6 nodi o elementi quadrangolari a 8 nodi).

Una volta generata la mesh, la griglia piana serve da riferimento durante l'assegnazione di tutte le proprietà dei materiali, elementi e carichi vengono poste nella griglia utilizzando l'input del mouse.

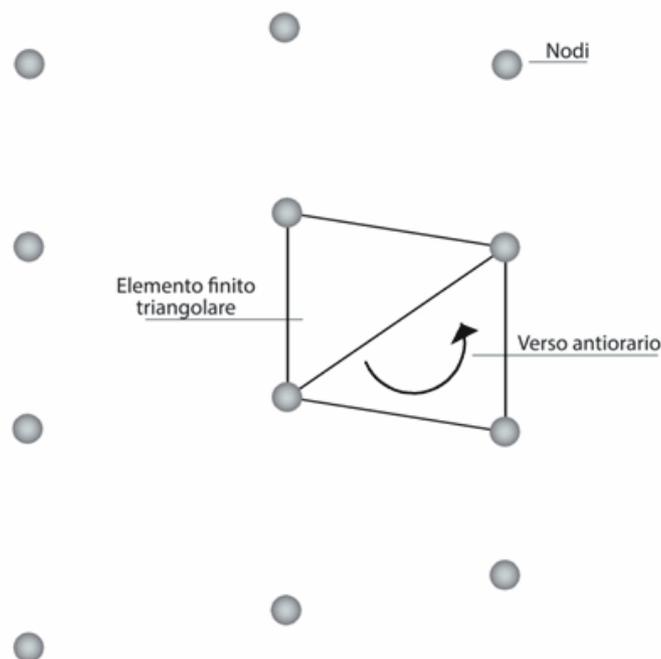


Fig. 4. Un set di 4 nodi utilizzati per formare due elementi finiti triangolari.

2.2.4 Divisione in elementi quadrangolari

Generati i nodi del modello, lo step successivo è quello di definire gli elementi. La regione può essere suddivisa in elementi triangolari o quadrangolari considerando 4 nodi in modo da formare un elemento quadrangolare così come mostrato nella Figura 4. Il quadrilatero interno

può essere lasciato come unico elemento o anche a sua volta essere suddiviso in due elementi triangolari secondo la diagonale più corta. Questa procedura è ripetuta finché tutti gli insiemi composti da 4 nodi sono stati analizzati. La suddetta divisione che utilizza la più corta diagonale è preferibile perché l'analisi di elementi chiusi in una forma equilatera produce una maggiore accuratezza nel calcolo rispetto ad elementi triangolari con forma stretta e allungata.

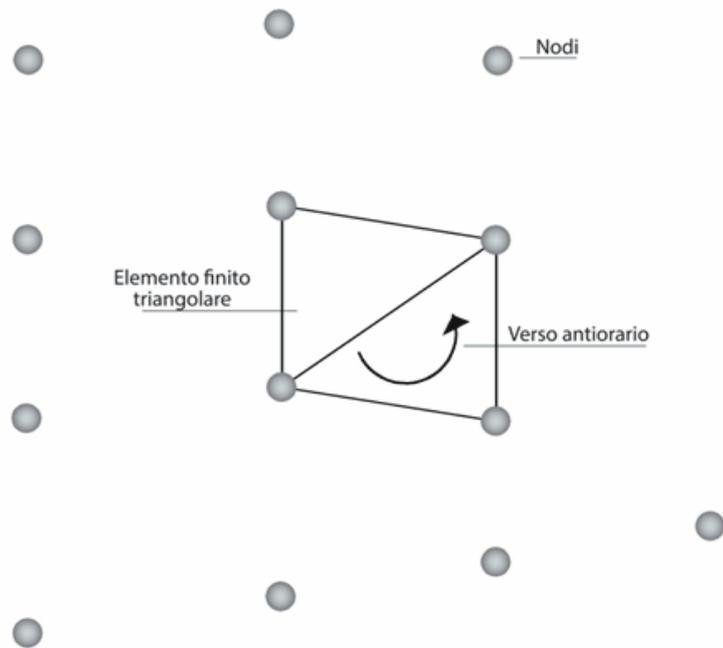


Fig. 4. Un set di 4 nodi utilizzati per formare due elementi finiti triangolari.

2.2.5 Triangolazione di Delaunay

Dopo aver generato i punti interni alle regioni, utilizzando la tecnica di mappatura, la mesh ad elementi finiti può essere generata utilizzando la ben nota tecnica di **triangolazione di Delaunay**. La numerazione dei nodi degli elementi in senso antiorario si effettua come mostrato nella Figura 5.

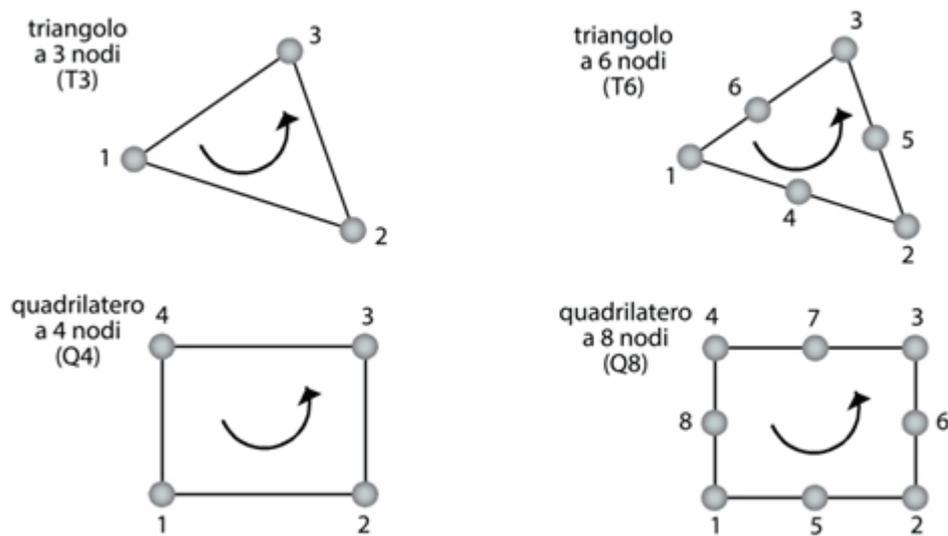


Fig. 5. Numerazione dei nodi degli elementi finiti in senso antiorario.

2.2.6 Legami tra regioni

Un corpo o un dominio è generalmente modellato utilizzando diverse regioni di forma quadrangolare collegate tra loro tramite uno o più lati. La possibilità di un contorno comune fra due regioni richiede alcune informazioni aggiuntive che devono essere fornite in modo che i nodi che ricadono sul contorno comune abbiano lo stesso numero indipendentemente da quale regione di stia considerando. Il numero dei nodi su tale contorno deve quindi essere identico e deve occupare la stessa posizione relativa. Questa proprietà è necessaria al fine di assicurare la continuità tra gli elementi del contorno.

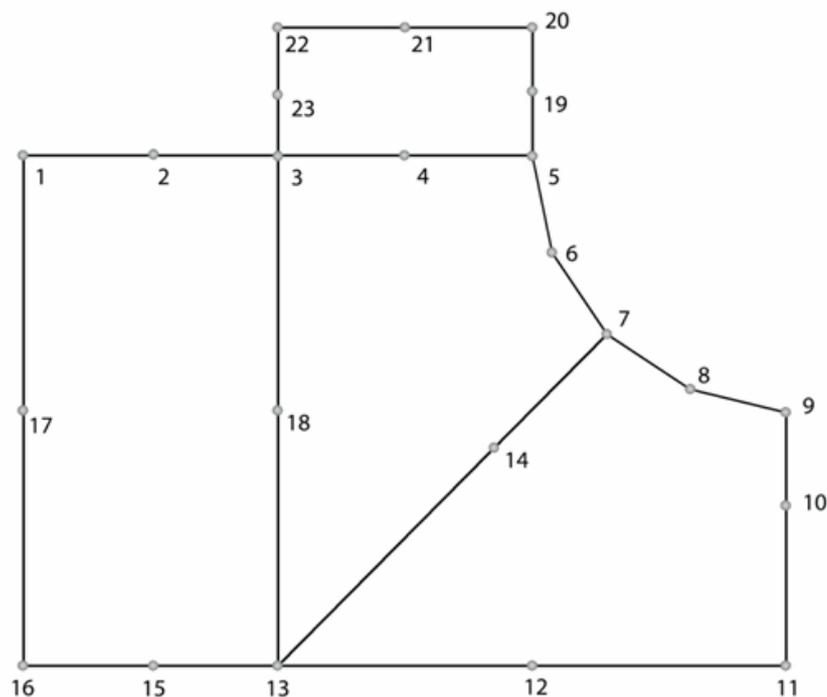


Fig. 6. Un set di quattro regioni quadrangolari connesse tra loro.

La determinazione dei legami è probabilmente illustrata meglio attraverso l'esempio mostrato in Figura 6 che rappresenta il caso di un corpo suddiviso in 4 regioni.

Le coordinate dei nodi del contorno sono riportati nella Tabella 1 mentre i dati relativi alle regioni (i numeri delle divisioni e la numerazione dei nodi degli elementi quadrangolari) sono mostrati nella Tabella 2.

Nodo	X[m]	Y[m]		Nodo	X[m]	Y[m]
1	0	0		13	20	-40
2	10	0		14	37	-23
3	20	0		15	10	-40
4	30	0		16	0	-40
5	40	0		17	0	-20
6	41.52	-7.65		18	20	-20
7	45.86	-14.14		19	40	5
8	52.35	-18.48		20	40	10
9	60	-20		21	30	10
10	60	-27.5		22	20	10
11	60	-40		23	20	5
12	40	-40				

Tabella 1. Coordinate dei nodi del contorno.

Regione	N- Riga	N- Col	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Nodo 6	Nodo 7	Nodo 8
1	25	15	16	15	13	18	3	2	1	17
2	25	25	13	14	7	6	5	4	3	18
3	25	25	13	12	11	10	9	8	7	14
4	15	25	3	4	5	19	20	21	22	23

Tabella 2. Dati delle regioni.

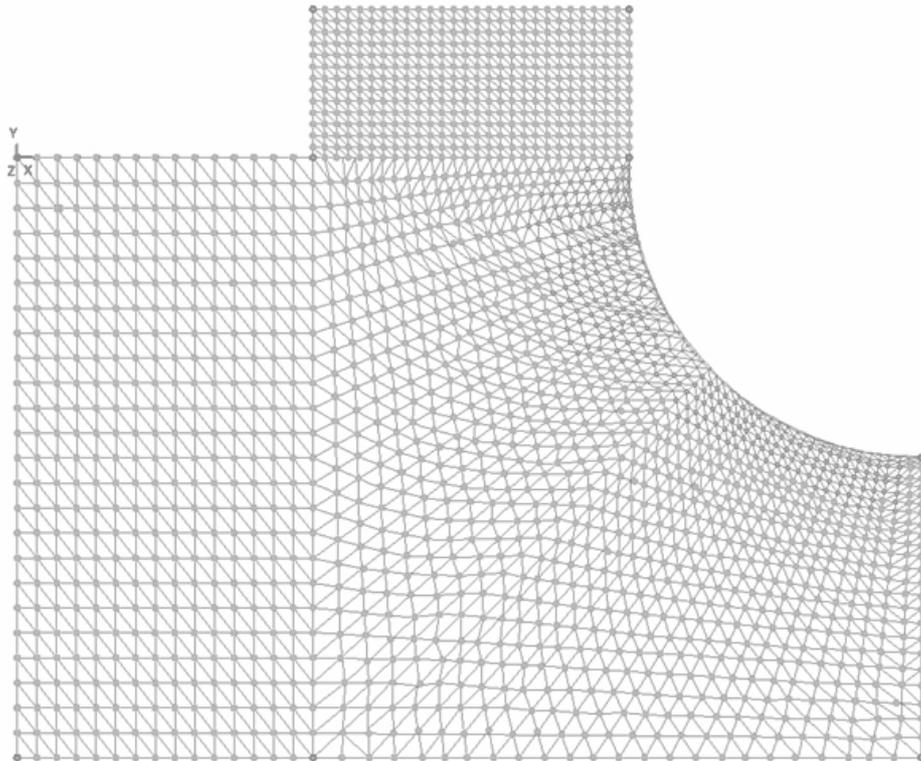


Fig. 7. La mesh. La triangolazione di Delaunay

2.3 Generazione della mesh non strutturata

Il modo più semplice per la generazione di un reticolo di calcolo in un piano è la creazione di una *mesh non strutturata* che sfrutti la triangolazione costante di Delaunay.

Nel caso di una regione di forma arbitraria, o di più regioni connesse, la mesh viene generata in modo automatico considerando le interfacce o i fori presenti nel dominio.

Per una triangolazione automatica ben riuscita, le curve o le polilinee devono essere selezionate in modo tale che formino una regione compatibile per la generazione della mesh come appena descritto.

- La regione può essere formata da una o più interfacce.
- Il bordo esterno della regione deve essere chiuso con continuità attraverso linee o curve.
- La regione può contenere fori o interfacce all'interno del contorno.

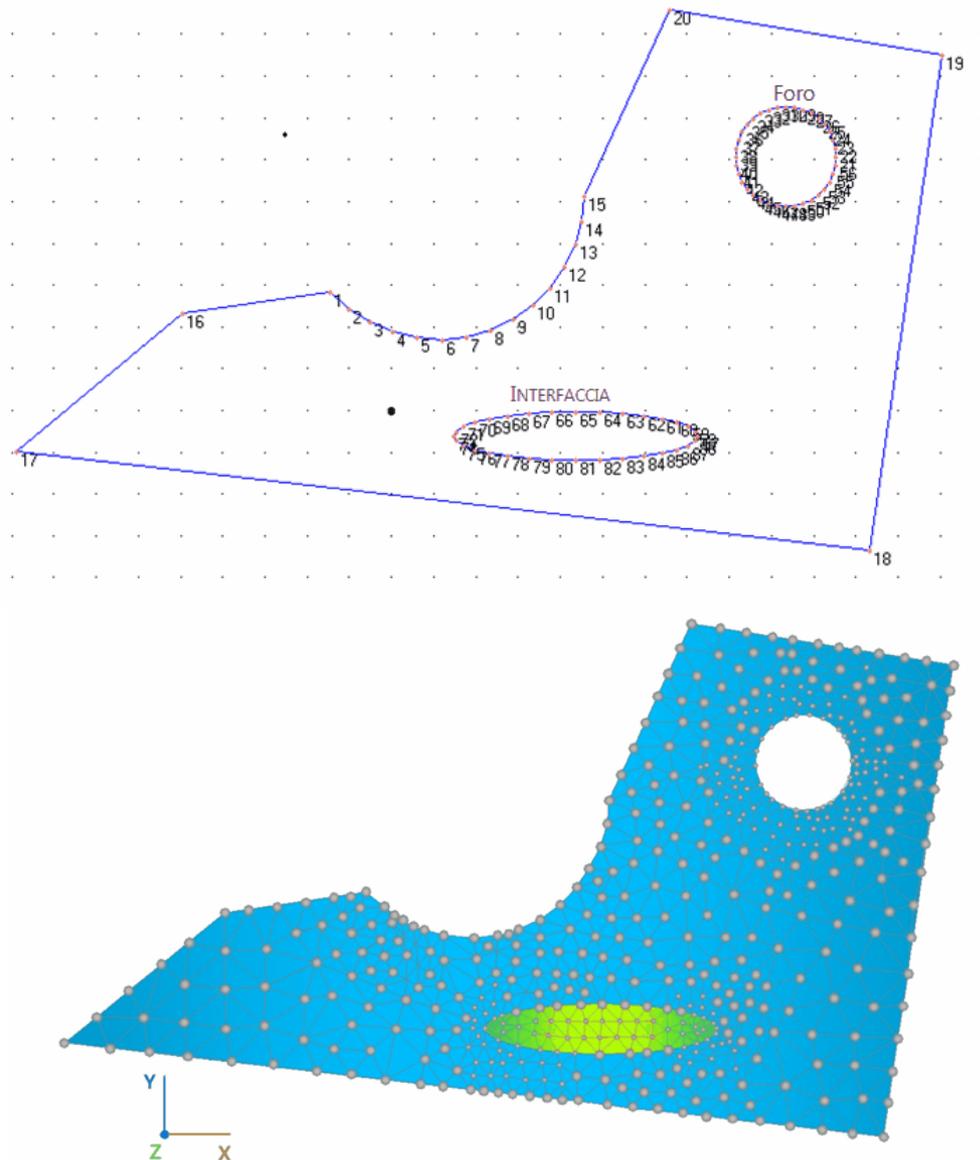
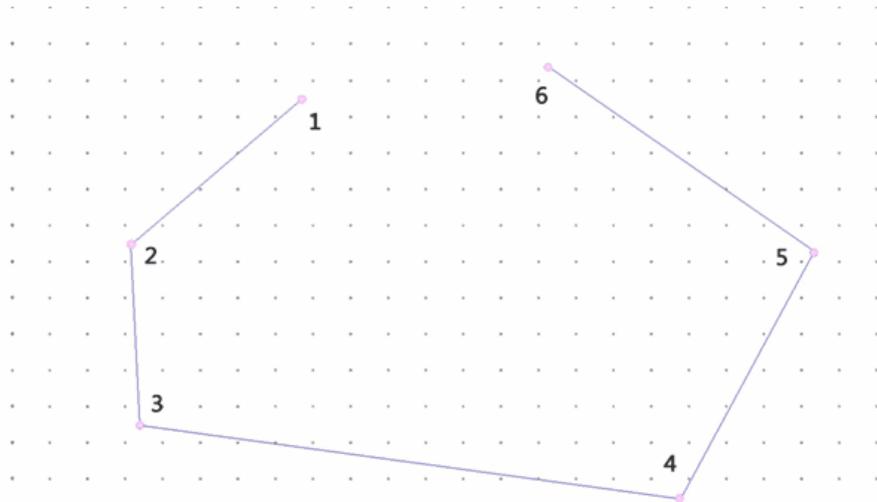
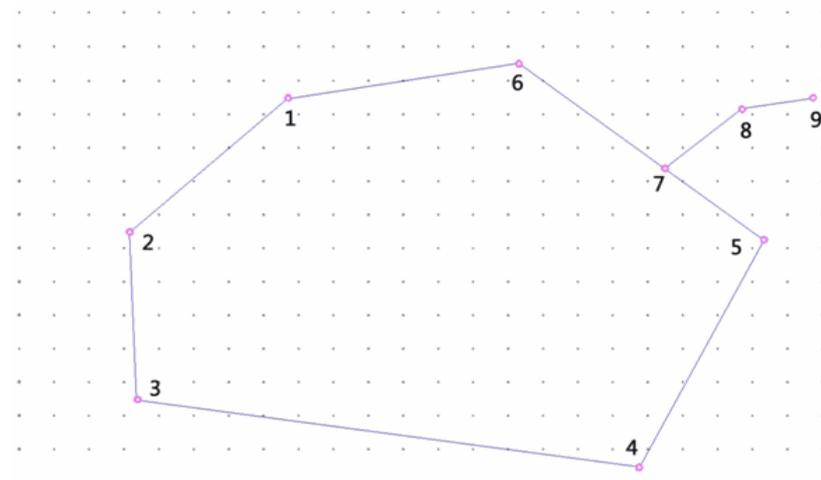


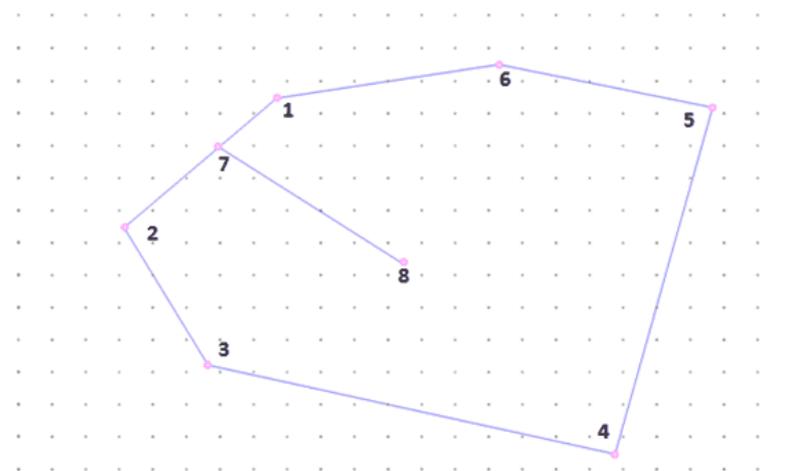
Figura 8. Regione compatibile per la triangolazione automatica.



(a) le linee non formano un contorno chiuso



(a) Le linee non sono contenute all'interno del confine della regione



(c) Le due curve contengono un punto che non è un nodo comune.

Figura 9. Regioni incompatibili per la triangolazione automatica.

2.4 Modificare la mesh

GFAS consente di modificare o correggere il reticolo generato. In particolare, la versione attuale include: **l'infittimento locale e globale, l'eliminazione di alcuni elementi della mesh, la rinumerazione dei nodi, la trasformazione degli elementi.**

2.4.1 Infittimento della mesh

2.4.1.1 Infittimento locale

Nel caso di un reticolo regolare, è possibile riscontrare la presenza di zone come ad esempio in prossimità degli spigoli o dei punti di applicazione di una forza, in cui è necessario quanto opportuno generare un numero maggiore di elementi finiti al fine di modellare in maniera ottimale gli elevati gradienti di tensione che si andrebbero altrimenti a generare.

La dimensione degli elementi può variare ponendo 2, 4, 6 o 8 nodi in alcuni punti diversi dai punti medi dei lati. Il movimento di questi nodi sposta l'origine del sistema di coordinate e produce uno schema molto simile a quello rappresentato nella Figura 10.

I nodi relativi ai punti medi dei lati restano all'interno dell'intervallo:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} < \xi < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} < \eta < \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (4)$$

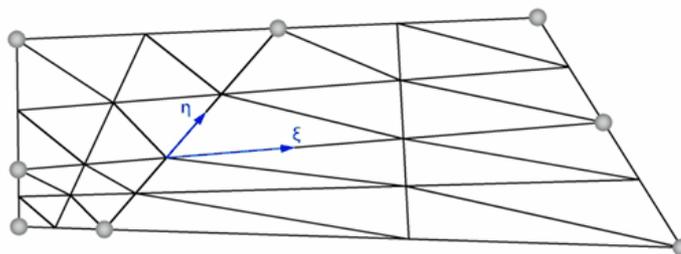


Fig. 10. Una regione con una variazione della dimensione dell'elemento.

2.4.1.2 Infittimento globale

Al fine di ridurre la dimensione del reticolo agli elementi finiti iniziale, l'infittimento della mesh globale può essere eseguita in fase di elaborazione. Una volta generato il modello grossolano, l'utente può

infittire il reticolo al livello desiderato. Ciò consente di ottenere file dati di ingresso piuttosto piccoli, in particolar modo i file contenenti il reticolo di calcolo, e di aumentare la risoluzione della maglia senza dover generare una nuova mesh. Lo schema seguito per ottenere l'infittimento globale è molto semplice, perché consiste nello scindere tutte le tipologie di elementi finiti in 4 elementi "figli" (Fig. 11).

Applicando questo schema la struttura del reticolo rimarrebbe comunque costante ed invariata preservandone la qualità (Fig. 12).

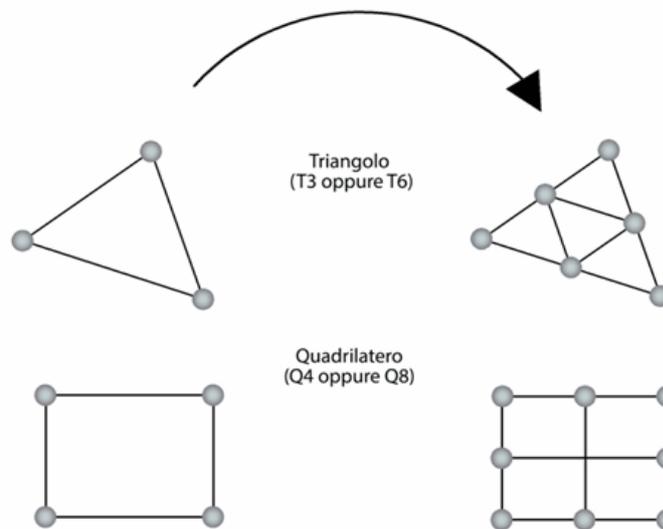


Fig.11 Infittimento globale di un elemento "genitore" in quattro elementi "figli".

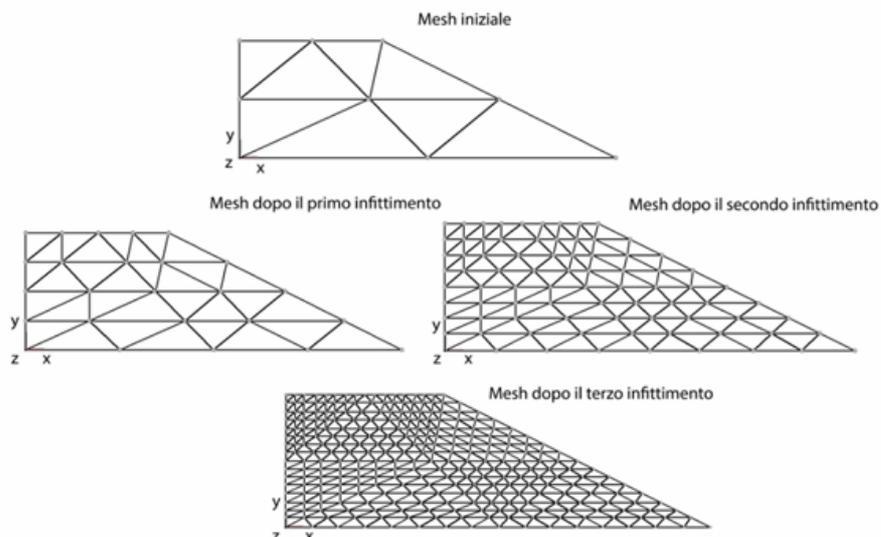


Fig.12 Infittimento automatico della mesh (h-refinement).

Ancora più importante è che il generatore del reticolo non deve costruire una mesh molto fitta e pertanto grande, nonostante comunque essa debba essere abbastanza fitta per risolvere i dettagli del modello geometrico e fornire elementi finiti di ottima qualità.

Inoltre, la convergenza dei risultati può essere facilmente ricercata con un fitto reticolo di elementi finiti (Fig. 12).

2.4.2 Cancellare gli elementi del reticolo

Il programma consente in modo conveniente di aggiungere o cancellare gli elementi finiti selezionati al fine di riuscire a creare geometrie del modello più complesse. Dopo aver cancellato una porzione del modello tutte le proprietà che erano state precedentemente assegnate al resto del corpo non vengono modificate (ad esempio il numero della regione, le proprietà dei materiali).

Anche la rinumerazione dei nodi viene automaticamente eseguita al fine di ridurre la larghezza della banda del risultante sistema di equazioni.

2.4.3 Rinumerazione dei nodi

Numerare i nodi ha una notevole influenza sull'ampiezza della banda della matrice dei coefficienti associata alla mesh. Chiaramente più è piccola l'ampiezza della banda minore è la memoria e la quantità di computazioni richieste per la risoluzione della matrice. Il metodo utilizzato a questo proposito è la rinumerazione RCM (Reverse Cuthill-McKee).

Con questa metodologia la forma della matrice sarà sparsa e a banda regolare, così che essa possa essere risolta facilmente.

2.4.4 Trasformazione del reticolo (p-refinement)

In seguito alla generazione della mesh in elementi finiti semplici, siano essi triangolari (T3) che quadrangolari (Q4), GFAS consente di trasformare gli elementi finiti generati in elementi di ordine superiore, triangolari a 6 nodi o quadrangolari ad 8 nodi.

Questa caratteristica è particolarmente importante poiché la convergenza del risultato può essere, con una trasformazione della mesh, facilmente controllata.

Se questo metodo venisse applicato a tutti gli elementi finiti del reticolo, la struttura della mesh si manterrebbe comunque costante (Figura 13) e la qualità del reticolo preservata.

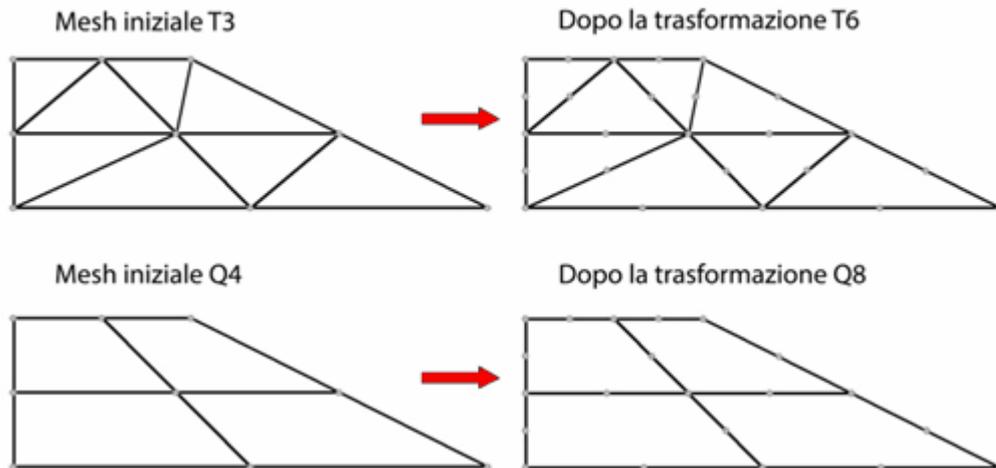


Fig. 13. Trasformazione della mesh da elementi semplici a elementi di ordine superiore (p-refinement).

3 Formulazione delle matrici e dei vettori degli elementi per problemi elastici

Risolvere un problema agli elementi finiti consiste nel valutare i singoli elementi che compongono le matrici di rigidezza e i vettori, per poi assemblarli in un'unica matrice delle rigidezze globale e nei vettori forza. L'insieme delle equazioni simultanee, che in questo modo si generano, sono successivamente risolte per determinare gli spostamenti nodali. Si definiscono σ ed ε i vettori contenenti, rispettivamente, le sei componenti di sollecitazione e di deformazione:

$$\begin{aligned} \sigma &= [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}] \\ \varepsilon &= [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}] \end{aligned} \quad (5)$$

Il legame tensione-deformazione assume la forma:

$$\varepsilon = \mathbf{C}\sigma \quad (6)$$

oppure:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (7)$$

dove E è una matrice simmetrica definita positiva, di costanti elastiche e C la sua inversa ($C=E^{-1}$).

Le componenti del vettore spostamento u lungo le direzioni x , y , e z sono rispettivamente u , v e w . La convenzione dei segni è la seguente: si assumono positivi gli spostamenti e le forze concordi con gli assi coordinati rappresentati in Figura 14.

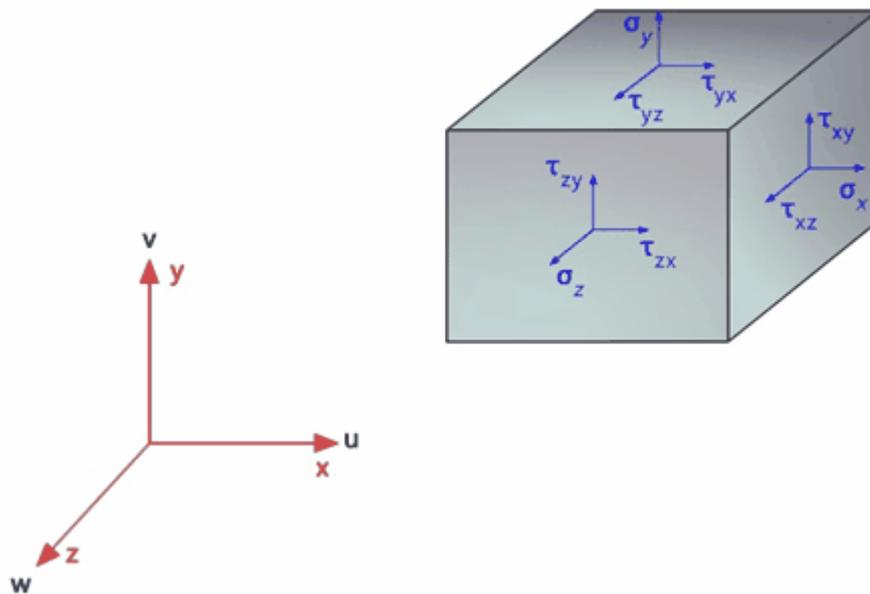


Fig. 14. Componenti delle tensioni.

3.1 Equazioni indefinite di equilibrio

La Figura 15 mostra un elemento infinitesimo piano su cui si mettono in evidenza le componenti vettoriali di tensione sui suoi lati inoltre sono presenti pure le quantità f_x e f_y componenti della forza di volume "forza gravitazionale".

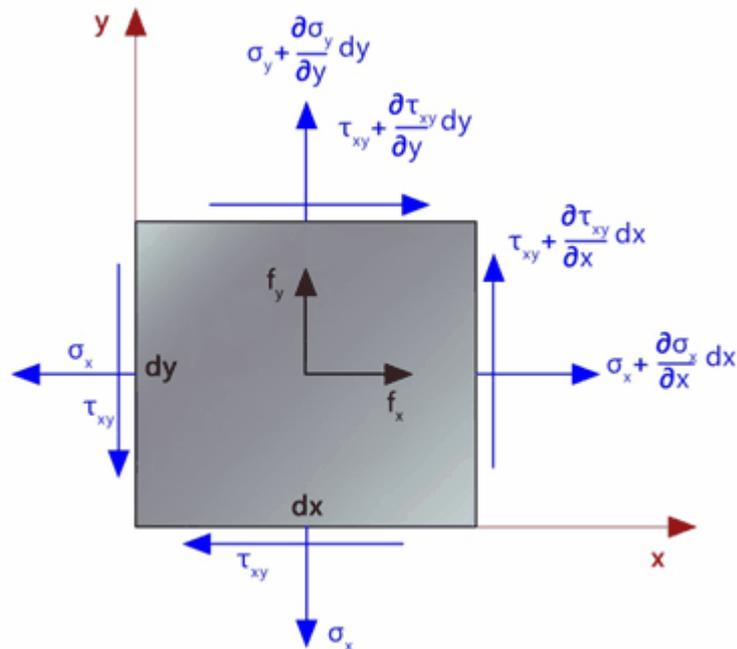


Fig. 15. Tensioni e forze di volume che agiscono su un elemento differenziale piano di spessore costante.

L'equilibrio alla traslazione fornisce le due equazioni indefinite di equilibrio che definiscono un legame differenziale tra le componenti del tensore degli sforzi e le forze di volume mentre l'equilibrio alla rotazione conferma la simmetria del tensore di Cauchy :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} \end{aligned} \quad (8)$$

Nel metodo degli elementi finiti le suddette equazioni differenziali di equilibrio risultano soddisfatte in senso approssimato in qualsiasi punto del mezzo.

3.2 Condizioni al contorno

Le condizioni al contorno rappresentano gli "strumenti" attraverso cui è possibile vincolare e/o limitare sia gli spostamenti sia le tensioni.

Il contorno S del corpo può essere suddiviso in due componenti: S_u , detto contorno vincolato, ed S_t contorno caricato (Figura 16).

Le condizioni al contorno (BC's) sono descritte come:

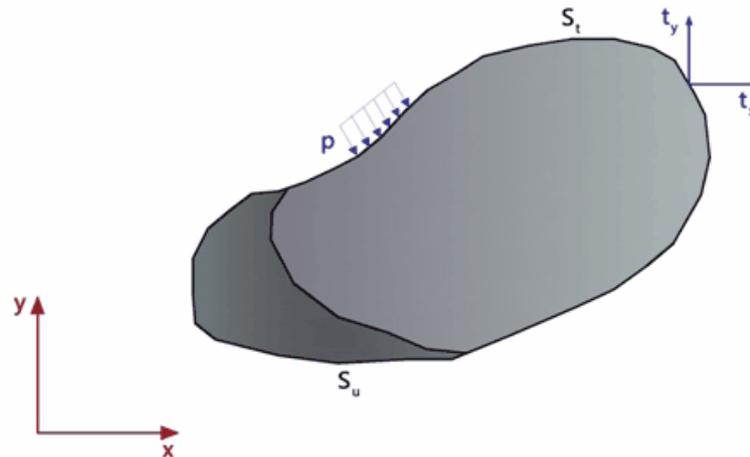


Fig. 16. Condizioni al contorno.

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad \text{su } S_u \quad (9)$$

$$t_x = \bar{t}_x, \quad t_y = \bar{t}_y \quad \text{su } S_t \quad (10)$$

in cui t_x e t_y rappresentano le trazioni superficiali mentre le quantità sopra segnate sono i valori noti.

3.3 Relazioni Deformazioni-Spostamenti

Per una struttura piana, nell'ambito delle ipotesi di piccoli spostamenti, le deformazioni dirette e lo scorrimento angolare tra due fibre originariamente ortogonali e disposte secondo gli assi cartesiani si possono formulare con le seguenti relazioni:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (11)$$

Oppure in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (12)$$

che in forma compatta diventa:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (13)$$

dove u e v sono le componenti degli spostamenti rispettivamente in direzione x ed y .

Se il campo di spostamento è definito da un polinomio, le deformazioni e le tensioni sono di un ordine inferiore rispetto agli spostamenti.

3.4 Formulazione generale della matrice delle rigidezze

Si consideri un corpo elastico lineare soggetto ad un sistema di forze conservative. Sia V il suo volume ed S la sua superficie, allora il funzionale Energia Potenziale Totale si ottiene sottraendo dall'energia di deformazione del mezzo il lavoro delle forze applicate ovvero:

$$W_p = \int_V \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \right) dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{F} dV - \int_S \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Phi} dS - \mathbf{D}^T \mathbf{P} \quad (14)$$

$\mathbf{u} = [u \quad v]^T$	rappresenta il campo di spostamento;
$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T$	rappresenta il campo delle deformazioni;
\mathbf{E}	è la matrice delle costanti elastiche (proprietà del materiale);
$\boldsymbol{\varepsilon}_0, \boldsymbol{\sigma}_0$	sono i valori iniziali rispettivamente delle deformazioni e delle tensioni;
$\mathbf{F} = [F_x \quad F_y]^T$	rappresenta le forze di volume;
$\boldsymbol{\Phi} = [\Phi_x \quad \Phi_y]^T$	definiscono le trazioni superficiali;
\mathbf{D}	rappresenta i gradi di libertà degli spostamenti nodali;
\mathbf{P}	sono i carichi applicati direttamente ai nodi.

Gli spostamenti nodali si ottengono interpolando i gradi di libertà degli elementi, contenuti nel vettore \mathbf{d} , attraverso la matrice delle funzioni di forma \mathbf{N} :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad (15)$$

Le deformazioni si ottengono dagli spostamenti tramite differenziazione.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \partial \mathbf{u} = \partial \mathbf{N} \mathbf{d} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (16)$$

dove:

$$\mathbf{B} = \partial \mathbf{N} \quad (17)$$

e rappresenta l'operatore deformazione-spostamento.

La matrice operatore differenziale ∂ è definita, nel caso di problemi piani, come:

$$\partial = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Sostituendo all'Equazione 14 le espressioni di u e di $\boldsymbol{\varepsilon}$, si ricava:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{Nr.El.} \mathbf{d}_n^T \mathbf{k}_n \mathbf{d}_n - \sum_{n=1}^{Nr.El.} \mathbf{d}_n^T \mathbf{r}_{en} - \mathbf{D}^T \mathbf{P} \quad (19)$$

dove la sommatoria include tutti i contributi provenienti dagli elementi finiti della struttura.

Gli elementi della matrice delle rigidità e gli elementi equivalenti del vettore dei carichi nodali sono definiti come:

$$\mathbf{k} = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV_e \quad (20)$$

$$\mathbf{r}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV_e - \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV_e + \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{F} dV_e + \int_{S_e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\Phi} dS_e \quad (21)$$

dove V_e ed S_e rappresentano rispettivamente il volume e la superficie di un singolo elemento.

Sostituendo nell'Equazione 14 al vettore d il vettore D , contenente i gradi di libertà strutturali globali, l'Equazione 14 si trasforma come segue:

$$W_p = \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \sum_{n=1}^{Nr.El.} \mathbf{k}_n \mathbf{D} - \mathbf{D}^T \sum_{n=1}^{Nr.El.} \mathbf{r}_{en} - \mathbf{D}^T \mathbf{P} = \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{K} \mathbf{D} - \mathbf{D}^T \mathbf{R} \quad (22)$$

Con:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_{n=1}^{Nr.El.} \mathbf{k}_n \\ \mathbf{R} &= \sum_{n=1}^{Nr.El.} \mathbf{r}_{en} + \mathbf{P} \end{aligned} \quad (23)$$

dove K rappresenta la matrice delle rigidità globale ed R il vettore delle forze nodali espresse nelle coordinate globali.

Nell'Equazione 22 la sommatoria indica l'assemblaggio degli elementi della matrice e dei vettori. In questo modo il funzionale Energia Potenziale Totale W_p dipende dai gradi di libertà D e gode della proprietà di stazionarietà:

$$\frac{\partial W_p}{\partial \mathbf{D}} = 0 \quad (24)$$

O in maniera esplicita:

$$\frac{\partial W_p}{\partial D_1} = \frac{\partial W_p}{\partial D_2} = \dots = \frac{\partial W_p}{\partial D_n} = 0 \quad (25)$$

ottenendo le equazioni algebriche simultanee da risolvere per le n incognite che rappresentano gli spostamenti associati ad ogni grado di libertà componente il vettore D .

Pertanto:

$$\mathbf{K} \mathbf{D} = \mathbf{R}$$

Dove K e R rappresentano rispettivamente la matrice delle rigidezze globale e il vettore dei carichi nodali assemblati per l'intera struttura.

3.4.1 Stato di deformazione piana

Per questo stato di deformazione $w=0$ in qualsiasi punto del mezzo mentre u e v sono funzioni delle coordinate x ed y ma non di z così, $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$.

Un esempio pratico è quello di un tunnel sotterraneo che si sviluppa per ipotesi lungo l'asse z , esso può deformarsi essenzialmente in condizione di deformazione piana. La matrice costitutiva E per un piano di deformazione isotropo è definita come:

$$\mathbf{E} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

La σ_z si può ricavare dalla relazione $\varepsilon_z = 0 = (\sigma_z - \nu\sigma_y - \nu\sigma_x)/E$ una volta note σ_x e σ_y , non rappresenta una variabile primaria.

3.4.2 Stato di tensione piana

Se si assume $\sigma_z = 0$, l'ipotesi configura uno stato di sforzo piana, è una condizione che solitamente si manifesta in una piastra piana definita ad esempio nel piano xy , soggetta a forze agenti secondo lo stesso piano. In questo caso la matrice costitutiva E è data da:

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Dove E è il modulo di Young e ν il rapporto di Poisson.

3.4.3 Stato assialsimmetrico

Un solido di rivoluzione è un corpo tridimensionale generato per rotazione di una sezione piana attorno ad un asse (Figura 17). Un solido di rivoluzione è assialsimmetrico se le proprietà geometriche e del materiale sono indipendenti dall'anomalia J . Se il carico è anch'esso assialsimmetrico il problema si riduce al caso bidimensionale; ogni punto del mezzo è caratterizzato dagli spostamenti u (radiale) e w (assiale); l'analisi è essenzialmente coincidente con quella del problema piano con la presenza delle componenti circonferenziali della deformazione e della tensione.

Le componenti delle tensioni e deformazioni per l'elemento sono:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^T &= [\sigma_r \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \tau_{rz}] \\ \boldsymbol{\varepsilon}^T &= [\varepsilon_r \quad \varepsilon_\theta \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{rz}] \end{aligned} \quad (29)$$

dove le deformazioni sono definite come segue, con u e w che rappresentano gli spostamenti rispettivamente in direzione r e z :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (30)$$

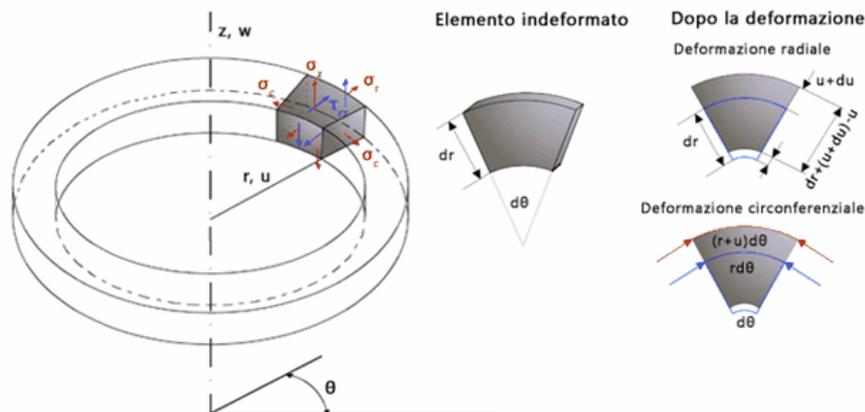


Fig. 17. Elemento assialsimmetrico e rappresentazione della sua deformazione.

Nota:

Deformazione radiale

$$\varepsilon_r = \frac{dr + (u + du) - u - dr}{dr} = \frac{du}{dr}$$

Deformazione circonferenziale

$$\varepsilon_\theta = \frac{(r + u)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r}$$

$$u = \varepsilon_\theta r$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{d}{dr}(\varepsilon_c r) = \varepsilon_c + r \frac{d\varepsilon_c}{dr} \quad (\text{equ. di congruenza})$$

La matrice costitutiva E , che collega le tensioni alle deformazioni, è:

$$E = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Dove E rappresenta il modulo di Young e ν il rapporto di Poisson.

3.5 Tipologie di elementi finiti

Gli elementi isoparametrici piani impiegati in **GFAS** hanno forma triangolare, quadrangolare, lineare o quadratica. La formulazione crea una corrispondenza biunivoca tra un elemento di forma qualsiasi nel sistema cartesiano (x, y) e un elemento di forma semplice nel sistema di riferimento naturale (x, h) : ciò è possibile attraverso la definizione di specifiche funzioni di trasformazione o di forma definite nel sistema naturale dell'elemento.

Le funzioni di forma sono utilizzate sia per specificare la forma degli elementi sia per l'interpolazione nel campo degli spostamenti.

Gli spostamenti (u, v) in ogni punto di un elemento piano sono interpolati a partire dagli spostamenti nodali (u_i, v_i) utilizzando le funzioni di forma N_i come segue:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \dots \end{Bmatrix} \quad (32)$$

Ovvero:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad (33)$$

Dove N è la matrice funzione di forma, u il vettore spostamento e d il vettore spostamento nodale.

Si assume che u e v siano indipendenti pertanto u dipende solo da u e v dipende solo da v .

Dalla relazione deformazione-spostamento segue che:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{N}\mathbf{d} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}\mathbf{d}\end{aligned}\quad (34)$$

avendo posto:

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{N} \quad (35)$$

\mathbf{B} rappresenta la matrice deformazione-spostamento.

L'ipotesi su cui si poggia la descrizione analitica del comportamento elastico è l'esistenza di un potenziale della deformazione. Si assume cioè che il processo deformativo comporti l'immagazzinamento di un'energia a spese della quale le deformazioni vengono recuperate una volta rimossa la causa deformante.

Tale potenziale detto "energia di deformazione" per ogni elemento, è definito dall'espressione:

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon})^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} dV \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}\mathbf{B} dV \mathbf{d} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k} \mathbf{d}\end{aligned}\quad (36)$$

Si ottiene, così, la formula generale della matrice delle rigidezze per gli elementi:

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}\mathbf{B} dV \quad (37)$$

dove la matrice costitutiva \mathbf{E} è data dalla relazione tensione-deformazione. La matrice delle rigidezze \mathbf{k} , definita dalla formula sopra riportata, è definita simmetrica fintanto che la matrice \mathbf{E} è simmetrica.

3.5.1 Triangolo a deformazione costante (CST, T3)

La Figura 18 mostra l'elemento triangolare bidimensionale semplice, che ha due gradi di libertà per ogni nodo. È detto anche elemento lineare triangolare (Constant Strain Triangle – CST).

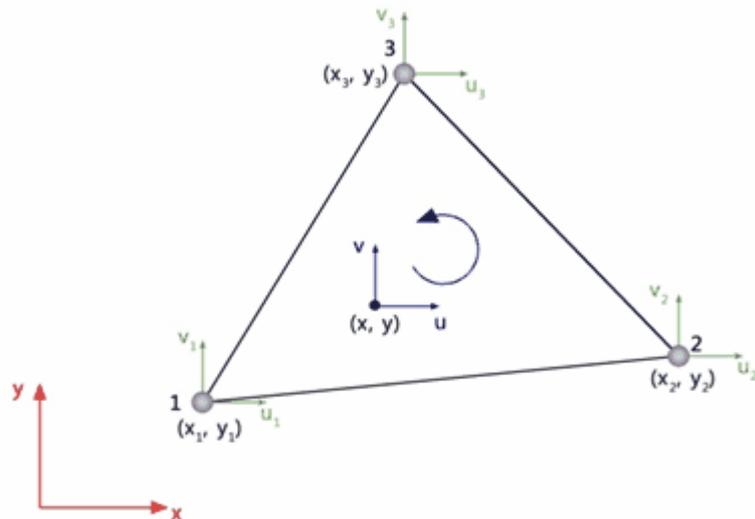


Fig. 18. Elemento finito triangolare lineare (T3).

L'elemento è caratterizzato da 3 nodi ai vertici del triangolo numerati in senso antiorario. Ogni nodo ha due gradi di libertà, pertanto si potrà muovere nella direzione x e y . Per ogni punto interno al triangolo, gli spostamenti u e v sono definiti da funzioni lineari:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y \\ v &= \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y \end{aligned} \quad (38)$$

Le costanti α e β si determinano imponendo le condizioni di vincolo ai nodi.

Risolvendo il sistema di equazioni si possono ricavare i coefficienti in termini di spostamenti nodali e coordinate.

Ogni elemento può essere rappresentato mediante due sistemi di coordinate: le coordinate globali o del sistema fisico (x, y) e le coordinate locali o del sistema naturale (ξ, η) (Figura 19).

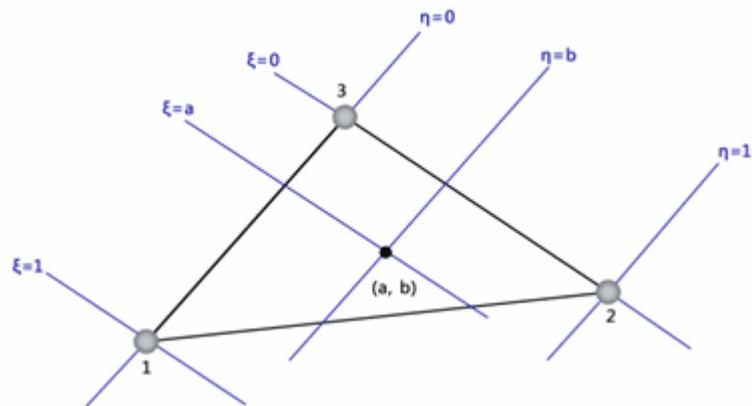


Fig. 19. Coordinate naturali per un elemento finito triangolare lineare.

La relazione che intercorre tra le due è la seguente:

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \end{aligned} \quad (39)$$

Ni sono le funzioni di forma definite nel sistema naturale (ξ, η) (Figura 19). Le funzioni di forma sono in numero pari ai nodi dell'elemento e variano tra 0 e 1: esse assumono valore 1 in corrispondenza del nodo i di coordinate (x_i, y_i) e valore nullo in corrispondenza degli altri nodi dell'elemento. Possono essere rappresentate come:

$$N_1 = \xi, \quad N_2 = \eta, \quad N_3 = 1 - \xi - \eta \quad (40)$$

Così, in funzione dei gradi di libertà nodali, il campo degli spostamenti è definito come:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (41)$$

Utilizzando la regola della catena per le derivate, si ha:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (42)$$

dove J è chiamata matrice Jacobiana della trasformazione.

3.5.2 Triangolo a deformazione lineare (LST, T6)

Questo elemento è anche chiamato elemento triangolare quadratico. È definito da 6 nodi: 3 sono posizionati nei vertici del triangolo e 3 nei punti medi dei lati (Figura 20). Ogni nodo ha due gradi di libertà e gli spostamenti (u, v) sono definiti come funzioni quadratiche di (x, y).

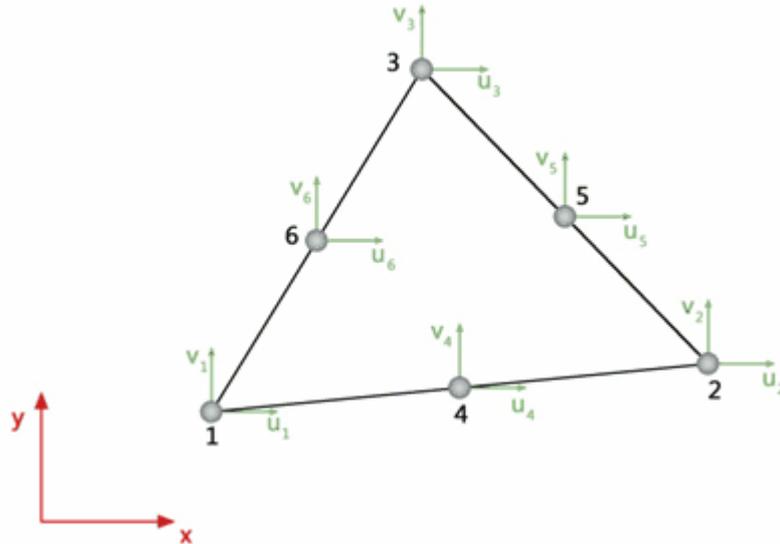


Fig.20. Elemento triangolare quadratico.

$$\begin{aligned} u &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 \\ v &= \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 x^2 + \beta_4 xy + \beta_5 y^2 \end{aligned} \quad (43)$$

Da ciò si ha che le deformazioni sono funzioni lineari, perciò il triangolo è definito a deformazione lineare (Linear Strain Triangle – LST) ed è pertanto in grado di fornire risultati migliori rispetto al triangolo a deformazione costante (CST).

Nel sistema di coordinate naturali, si definiscono facilmente le sei funzioni di forma per l'elemento LST come:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \xi(2\xi - 1) \\
 N_2 &= \eta(2\eta - 1) \\
 N_3 &= \zeta(2\zeta - 1) \\
 N_4 &= 4\xi\eta \\
 N_5 &= 4\eta\zeta \\
 N_6 &= 4\zeta\xi
 \end{aligned} \tag{44}$$

In cui $\zeta = 1 - \xi - \eta$

Gli spostamenti possono essere formulati come:

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{i=1}^6 N_i u_i \\
 v &= \sum_{i=1}^6 N_i v_i
 \end{aligned} \tag{45}$$

Gli elementi della matrice delle rigidezze sono dunque dati da:

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \tag{46}$$

Dove il prodotto $\mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B}$ è un prodotto quadratico in x e y , e l'integrale è computabile numericamente.

3.5.3 Elemento Quadrangolare Lineare (Q4)

Questa tipologia di elemento ha 4 nodi nei vertici come mostrato nella Figura 21.

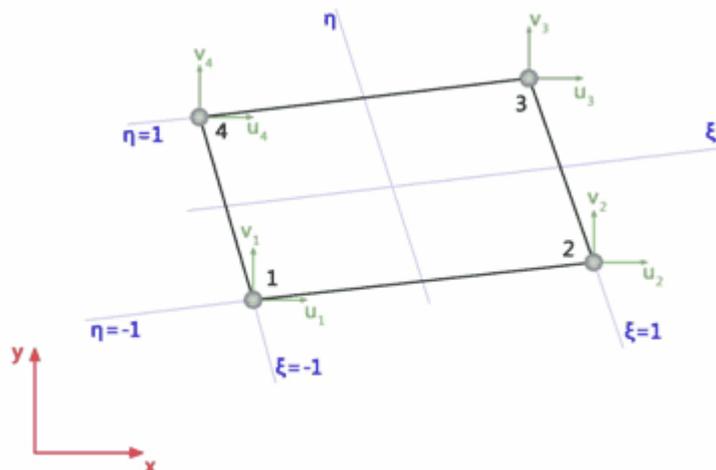


Fig. 21. Elemento quadrangolare lineare (Q4).

Nel sistema di coordinate naturali (ξ, η) , le quattro funzioni di forma sono definite come (Equazione 47):

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (47)$$

Esse sono il risultato di una interpolazione bilineare. Il campo degli spostamenti è dato da:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^4 N_i u_i \\ v &= \sum_{i=1}^4 N_i v_i \end{aligned} \quad (48)$$

3.5.4 Elemento quadrangolare quadratico (Q8)

L'elemento contiene 8 nodi, di cui 4 sono posizionati nei vertici dell'elemento e i restanti 4 nei punti medi dei lati (Figura 22).

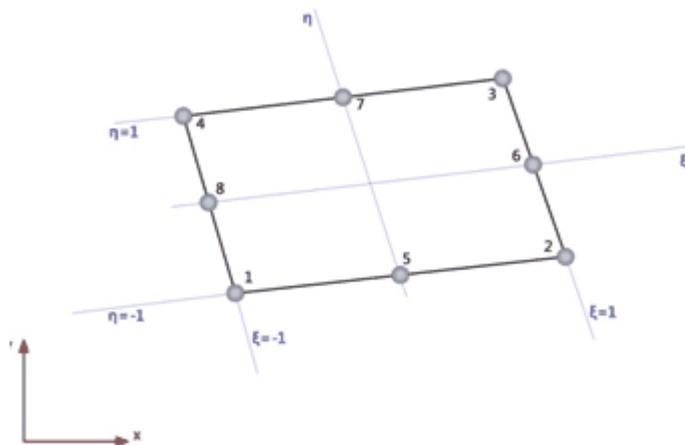


Fig.22. Elemento quadrangolare quadratico(Q8).

Nel sistema di coordinate naturali (ξ, η) , le otto funzioni di forma sono:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(\eta-1)(\xi+\eta+1) \\
N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(\eta-1)(-\xi+\eta+1) \\
N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(\eta+1)(\xi+\eta-1) \\
N_4 &= \frac{1}{4}(\xi-1)(\eta+1)(\xi-\eta+1) \\
N_5 &= \frac{1}{2}(1-\eta)(1-\xi^2) \\
N_6 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\
N_7 &= \frac{1}{2}(1+\eta)(1-\xi^2) \\
N_8 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)
\end{aligned} \tag{49}$$

Il campo degli spostamenti è dato da:

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{i=1}^8 N_i u_i \\
v &= \sum_{i=1}^8 N_i v_i
\end{aligned} \tag{50}$$

Le tensioni e le deformazioni relative all'elemento quadrangolare quadratico sono funzioni lineari che forniscono una migliore rappresentazione rispetto all'elemento quadrangolare lineare.

3.6 Integrazione numerica degli elementi finiti

L'integrazione delle equazioni che definiscono le matrici di rigidezza e i vettori di carico non può essere eseguita analiticamente per il caso generale degli elementi isoparametrici. Invece, le matrici di rigidezza e i vettori di carico sono valutati numericamente utilizzando la regola della quadratura di Gauss, applicabile a regioni di forma triangolare e quadrangolare.

La formula della *quadratura di Gauss* per il dominio di integrazione nel caso bidimensionale espressa in coordinate naturali è:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum H_i f(\xi_i, \eta_i) \quad (51)$$

In cui i valori di H_i sono le funzioni di peso necessarie all'applicazione della *regola integrazione di Gauss*, mentre (ξ_i, η_i) sono le coordinate di opportuni punti nell'intervallo (in gergo punti di Gauss o punti di campionamento). I punti di campionamento e le funzioni di peso sono utilizzate nel caso di elementi quadrangolari come mostrato nella Tabella 3. Si utilizza uno schema 2x2 o 3x3, in base all'ordine della funzione che deve essere valutata.

Generalmente la formulazione a 4 punti è utilizzata per gli elementi quadrangolari a 4 nodi, mentre quella a 9 punti per gli elementi ad 8. La matrice delle rigidezze dell'elemento quadrangolare generale ad 8 nodi contiene termini polinomiali del quarto ordine e così richiede 9 punti di campionamento per effettuare l'integrazione. Accade spesso che l'uso dell'integrazione di riduzione utilizzando i 4 punti migliori le prestazioni dell'elemento. Questo è particolarmente vero nelle applicazioni di tipo plastico. I pesi e i punti della quadratura per gli elementi triangolari (T3 e T6) sono riassunti nella Tabella 4.

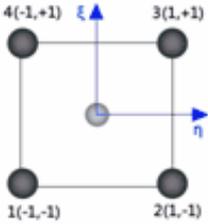
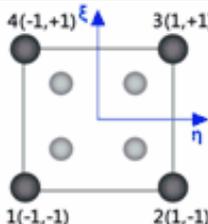
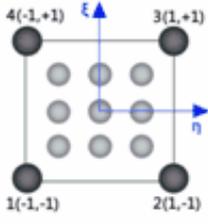
Posizione dei punti di campionamento	Grado del polinomio	n	Coordinate		Funzione di peso
			ξ	η	
	1	1	0	0	4
	3	4	-1/√3 1/√3 -1/√3 1/√3	-1/√3 -1/√3 1/√3 1/√3	1 1 1 1
	4	9	-√3/5 0 √3/5 -√3/5 0 √3/5 -√3/5 0 √3/5	-√3/5 -√3/5 -√3/5 0 0 √3/5 √3/5 √3/5 √3/5	25/81 40/81 25/81 40/81 64/81 40/81 25/81 40/81 25/81

Tabella 3. Pesì e punti di campionamento della quadratura di Gauss per elementi quadrangolari.

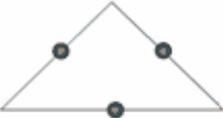
Localizzazione dei punti campionamento	Grado del polinomio	n	Coordinate		Funzioni di peso
			ξ	η	
	1	1	1/3	1/3	1/2
	2	3	1/2 1/2 0	1/2 0 1/2	1/6 1/6 1/6

Tabella 4. Pesi e punti di campionamento della quadratura di Gauss per elementi triangolari.

3.7 Calcolo delle deformazioni

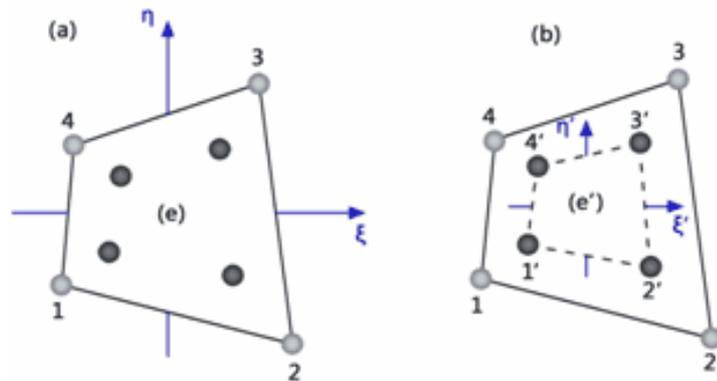
Dopo aver valutato le matrici e i vettori di ogni elemento, segue il processo di assemblaggio per computare il sistema globale delle equazioni. La soluzione del sistema globale di equazioni fornisce gli spostamenti nei nodi del modello ad elementi finiti. Ottenuti i risultati si calcolano le deformazioni e le tensioni in ciascun elemento. Per problemi in campo elastico, le deformazioni in un elemento sono calcolate a partire dagli spostamenti come:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (52)$$

Negli elementi semplici, come ad esempio nel CST, la matrice B Deformazione-Spostamento è costante, pertanto le deformazioni sono costanti e si possono calcolare dovunque nell'elemento.

Per gli elementi ad 8 nodi, invece, B è funzione del sistema di coordinate (spostamenti) e non sempre è una funzione esplicita. Pertanto le deformazioni devono essere valutate in posizioni specifiche in ciascun elemento. La localizzazione che fornisce risultati più accurati è quella utilizzata per i dei punti di campionamento con cui si sono determinate la matrice Deformazione-Spostamento B e la matrice delle rigidezze k. Le tensioni sono calcolate con le leggi di Hooke. Queste tensioni possono essere stimate ovunque nell'elemento ma hanno una migliore precisione se valutate nei punti di integrazione di Gauss.

Per esempio per l'elemento quadrangolare a 4 nodi le sollecitazioni hanno una maggiore precisione se valutate nei punti di integrazione 2x2 come mostra la Figura 23.



(a) Regola 2x2. (b) Elemento di Gauss (e')

Fig.23. Estrapolazione dei punti di campionamento di un elemento quadrangolare a 4 nodi

Al fine di costruire un campo continuo delle tensioni è necessario estrapolare i valori risultati dai punti di integrazione ai nodi degli elementi finiti. Le tensioni ai nodi, particolarmente nei vertici dell'elemento, sono molto importanti. Per calcolare le tensioni nodali, anche la matrice B deve essere valutata nei nodi, oppure le tensioni devono essere interpolate a partire dai valori ottenuti dai punti di campionamento. Un possibile modo per creare un campo continuo delle tensioni con una buona accuratezza consiste nel:

- 1) estrapolare le tensioni per ridurre i punti di integrazione ai nodi;
- 2) valutare i contributi medi per gli elementi finiti a tutti i nodi del modello.

Il processo di interpolazione-estrapolazione è descritto come segue. Si assume che le tensioni possono essere valutate ai quattro punti di Gauss di un elemento quadrangolare piano. Si vogliono interpolare o estrapolare le tensioni degli altri punti dell'elemento. Nella Figura 23, la coordinata ξ' è proporzionale a ξ e η' è proporzionale a η . Nel punto $3'$, $\xi'=1$, $\eta'=1$ e $\xi=\eta=1/\sqrt{3}$. Cioè:

$$\begin{aligned}\xi' &= \xi\sqrt{3} \\ \eta' &= \eta\sqrt{3}\end{aligned}\tag{52}$$

Le tensioni in ogni punto P dell'elemento sono date dalle funzioni di forma assunte per l'interpolazione del campo di spostamento:

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^4 N_i \sigma_i \quad (53)$$

dove σ include le componenti σ_x , σ_y , τ_{xy} .

Le funzioni di forma N_i sono funzioni bilineari:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 \pm \xi')(1 \pm \eta') \quad (54)$$

Le funzioni di forma si valutano nelle coordinate ξ' e τ' del punto P. Per esempio, lasciando coincidere il punto P con un vertice, per calcolare la tensione σ_x nel nodo a partire dal valore σ_x valutato ai quattro punti di Gauss, si sostituisce la relazione $\xi' = \eta' = 1/\sqrt{3}$ nelle funzioni di forma definite sopra e si applica la formula data nell'Equazione (53).

Nel caso degli elementi triangolari si applica un approccio del tutto simile. Per esempio per gli elementi triangolari di ordine superiore, a 6 nodi, e con 3 punti di Gauss, le tensioni in ogni punto dell'elemento sono computate usando le funzioni di forma come:

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^3 N_i \sigma_i \quad (55)$$

Dove le funzioni di forma sono definite da:

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi' \\ N_2 &= \eta' \\ N_3 &= 1 - \xi' - \eta' \end{aligned} \quad (56)$$

Valutate nelle coordinate ξ' e τ' :

$$\begin{aligned} \xi' &= 2\xi - \frac{1}{3} \\ \eta' &= 2\eta - \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (57)$$

Come già detto, queste quadrature sono di ordine inferiore per elementi di ordine superiore, e rappresentano quello che viene definito schema di

integrazione ridotta. Lo schema di integrazione ridotta è preferibile per due ragioni.

Innanzitutto l'onere computazionale necessario a generare una matrice di elementi finiti per l'integrazione numerica è proporzionale al numero dei punti di campionamento, cosicché utilizzando meno punti di campionamento si ha un onere minore.

Secondo, leggi di ordine inferiore tendono a contrarre un elemento in modo da opporsi al comportamento eccessivamente rigido associato al campo di spostamento ipotizzato. Le tensioni sono generalmente mediate ai nodi nei Software che effettuano le Analisi agli Elementi Finiti (FEA) per ottenere una maggiore accuratezza nei valori.

Questa opzione può essere disattivata ai nodi compresi fra due materiali differenti o in corrispondenza di discontinuità esistenti. Le tensioni e le deformazioni al centro dell'elemento si ottengono attraverso l'estrapolazione delle tensioni dai punti di integrazione di Gauss.

Il programma è implementato da una tecnica molto efficiente chiamata Super Convergence Patch Recovery (SCP). Fondamentalmente il metodo utilizza il concetto della correzione locale di una porzione dell'elemento campionata nei punti di integrazione per produrre una serie regolare dei minimi quadrati adatta a rappresentare le tensioni nodali (Figura 24).

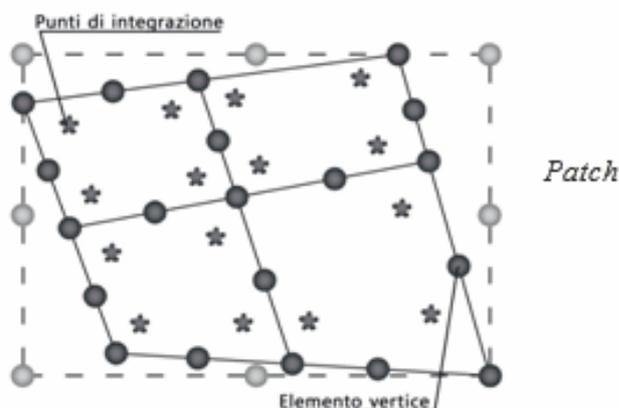


Fig. 24. Super Convergent Patch Stress Recovery.

Come appena detto, i punti di integrazione sono dei punti speciali dove le tensioni assumono i valori più attendibili. L'utente è spesso interessato non solo alle singole componenti delle tensioni, ma anche al valore della tensione globale come la tensione di Von Mises.

Nel caso di tensione piana, le tensioni di Von Mises sono date da:

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2} \quad (58)$$

Dove σ_1 e σ_2 sono le tensioni principali date da:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (59)$$

L'angolo formato dalle direzioni delle tensioni principali (Figura 25) si determina come:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}$$

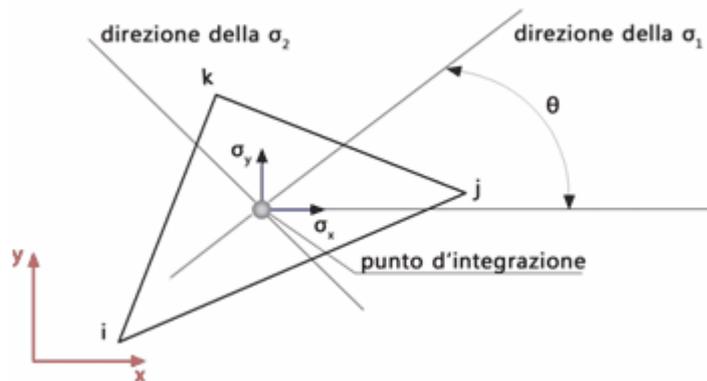


Fig. 25. Tensioni principali

Il post-processor mostra il contorno della sollecitazione che è tipicamente prodotto lavorando sulle tensioni nodali medie. Questi contorni possono essere visualizzati come 'stress bands' designando degli intervalli equispaziati di sollecitazione, localizzando le aree di ciascun elemento che ricade in ogni intervallo, e utilizzando diversi colori per rappresentare ognuno di esso.

3.8 Carichi nodali costanti

Il vettore dei carichi nodali costanti r_e dato dall'Equazione (21) converte i carichi distribuiti su un elemento o sulla sua superficie o causati da una deformazione o sollecitazione iniziale, in carichi discreti sui nodi. Questi sono definiti costanti perché sono basati sulle stesse funzioni di forma come quelle utilizzate per calcolare gli elementi che compongono la

matrice delle rigidezze. Peraltro questi carichi sono staticamente equivalenti ai carichi distribuiti originari: sia r_e e sia i carichi originari hanno la stessa risultante delle forze e lo stesso momento risultante calcolato rispetto a qualsiasi punto scelto in modo arbitrario.

Questi carichi sono chiamati carichi di esercizio equivalenti per la seguente ragione: il lavoro svolto dai carichi nodali r_e per ottenere lo spostamento nodale d è uguale al lavoro compiuto dai carichi distribuiti F e Φ per ottenere il campo di spostamento associato alla funzione di forma dell'elemento:

$$W = d^T r_e = \int_{S_e} d^T N^T \Phi dS = \int_{S_e} u^T \Phi dS \quad (60)$$

L'ultimo integrale somma il lavoro compiuto dall'incremento delle forze ΦdS per ottenere u , dove u è campo degli spostamenti creato da d attraverso le funzioni di forma.

3.8.1 Le forze di volume

Le forze di volume sono definite dalla seguente equazione:

$$r_{em} = \int_{V_e} N^T F dV_e \quad (61)$$

Se r_{em} si riferisce a ciascun elemento finito con spessore costante ed n nodi si ha la seguente forma:

$$r_{em} = \int_{V_e} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ \dots & \dots \\ N_n & 0 \\ 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} dV_e = h \int_{V_e} \begin{bmatrix} N_1 F_x \\ N_1 F_y \\ N_2 F_x \\ N_2 F_y \\ \dots \\ N_n F_x \\ N_n F_y \end{bmatrix} dA_e \quad (62)$$

dove F_x ed F_y sono le forze di volume in direzione x e y come la forza di gravità, forze di inerzia, etc.. Per esempio il vettore dei carichi di gravità r_{em} , in condizione di deformazione piana ($h=1$), è riempito elemento per elemento da un integrale del tipo:

$$\mathbf{r}_{em} = \sum_{i=1}^{No. elements} \gamma \iint N^T dx dy \quad (63)$$

Dove γ denota la densità del materiale dell'elemento e N la matrice delle funzioni di forma. Questi calcoli sono eseguiti nella stessa parte del programma in cui si costituisce la matrice delle rigidezze globale. Si può notare che negli integrali si tiene solo conto delle componenti verticali. Ad esempio per gli elementi finiti a 3 nodi le forze gravitazionali sono stimate come:

$$\mathbf{r}_{em} = -\frac{1}{3} h A_s \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Assumendo che l'elemento è definito nel sistema di coordinate globali in modo che il carico gravitazionale sia agente lungo la direzione y .

3.8.2 La distribuzione delle forze

La distribuzione delle forze è data dalla seguente equazione:

$$\mathbf{r}_{ez} = \int_{S_e} N^T \Phi dS_e \quad (65)$$

In particolare per un elemento finito di spessore unitario con n nodi e isoparametrico la distribuzione delle forze può essere definita come:

$$\mathbf{r}_{ez} = \int_{S_e} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ \dots & \dots \\ N_n & 0 \\ 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} dS_e \quad (66)$$

In cui Q_x e Q_y sono le componenti dei carichi distribuiti in direzione x ed y , e poiché lo spessore degli elementi è costante ($h=\text{cost}$) $dS_e=hdl$ si ottiene:

$$\mathbf{r}_{ez} = h \int_{l_e} \begin{bmatrix} N_1 Q_x \\ N_1 Q_y \\ N_2 Q_x \\ N_2 Q_y \\ \dots \\ N_n Q_x \\ N_n Q_y \end{bmatrix} dl \quad (67)$$

3.8.3 Carichi da Tensioni e Deformazioni iniziali

In questo caso i carichi nodali costanti equivalenti sono dati dai primi due termini dell'Equazione 21:

$$\mathbf{r}_{ez} = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV_e - \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV_e \quad (68)$$

Questi carichi nodali sono auto equilibranti, non producono né risultante delle forze né risultante del momento.

3.8.4 Pressioni neutre

L'effetto della superficie libera sul suolo compatto può essere preso in considerazione in due modi: il primo consiste nella valutazione dello spettro idrostatico valutando la pressione dell'acqua nei pori del terreno sia attraverso un'analisi rigorosa dello stato stazionario e sia attraverso un carico esterno causato dalla falda che agisce sulla massa.

La pressione interstiziale è calcolata in tutti i punti sommersi (integrazione di Gauss) e sottratta dalle tensioni normali totali calcolata nelle stesse posizioni considerando la superficie libera e i carichi gravitazionali. Le tensioni effettive risultanti sono così utilizzate nella restante parte dell'algoritmo relativa alla valutazione della funzione di snervamento e alla redistribuzione delle tensioni elasto-plastiche.

Se chiamiamo con p la pressione neutra interstiziale, definita come un potenziale delle forze di volume, su un elemento infinitesimo agiranno, in direzione x - y del piano, le seguenti forze:

$$p_x = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad p_y = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (69)$$

Si considera un elemento finito con nodi i, j, k se il potenziale delle forze di volume ai nodi è pari a p_i, p_j, p_k allora il potenziale delle forze per l'elemento considerato può essere scritto come:

$$\mathbf{p}^e = [p_i \quad p_j \quad p_k]^T \quad (70)$$

Poiché per il potenziale si possono scegliere le stesse funzioni di forma utilizzate per il campo degli spostamenti dell'elemento finito, si può scrivere in modo analogo:

$$\mathbf{p} = [N_i \quad N_j \quad N_k] \mathbf{p}^e = \mathbf{N} \mathbf{p}^e \quad (71)$$

L'effetto della pressione neutra interstiziale produce delle tensioni normali σ'_0 , che per l'analisi di deformazione piana è data da:

$$\sigma'_0 = \mathbf{m} \mathbf{p} \quad (72)$$

E per il caso di deformazione piana:

$$\mathbf{m} = [1 \quad 1 \quad 0]^T \quad (73)$$

Il vettore delle tensioni totali quindi assume la seguente forma:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + \sigma'_0 = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{m} \mathbf{p} \quad (74)$$

Di conseguenza, le equazioni generali di equilibrio, date dall'Equazione 21, possono essere generalizzate introducendo il seguente termine nel vettore degli elementi dei carichi nodali equivalenti tenendo conto in questo caso dell'effetto delle pressioni interstiziali:

$$\mathbf{r}_{e,eq} = -\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{p} dV = -\int_V (\mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{N} dV) \mathbf{p}^e \quad (75)$$

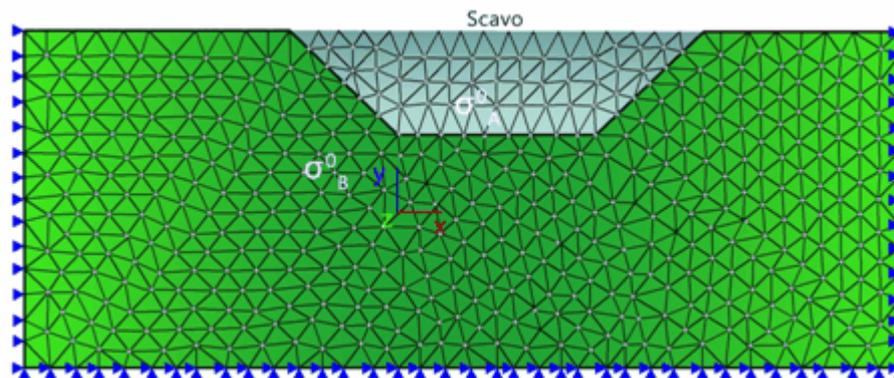
3.8.5 Forze di scavo

Quando una porzione di terreno è scavata, sia nella fase di apertura dello scavo (taglio) che nella fase di chiusura di un tunnel, le forze devono essere applicate lungo la superficie scavata in modo tale che il materiale restante presenti l'effetto corretto di distensione della tensione e la nuova superficie libera sia priva di tensioni. Si suppone che il corpo A venga rimosso dal corpo B come mostra la Figura 26, e si denota che le tensioni nelle due parti del corpo prima dello scavo siano rispettivamente σ_A^0 e σ_B^0 . Eventuali carichi esterni sono presi in considerazione nella formazione delle tensioni prima della rimozione del corpo A. Fintanto che entrambi i corpi sono in condizione di equilibrio le forze FAB sono applicate sul corpo B dal corpo A per mantenere σ_B^0 e, nello stesso modo FBA agisce sul corpo A. Queste forze sono uguali in intensità ma sono opposte in segno. Le forze di scavo che agiscono sul contorno dipendono dallo stato tensionale del materiale scavato e dal suo peso proprio.

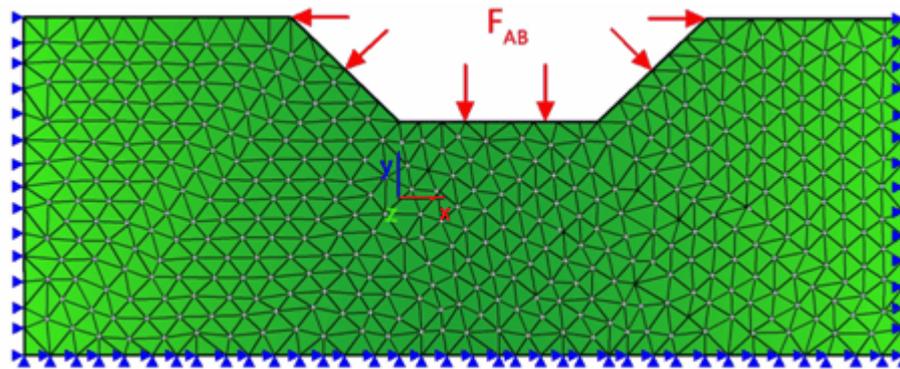
Si può quindi scrivere che:

$$\mathbf{F}_{BA} = \int_{V_A} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_A^0 dV_A + \gamma \int_{V_A} \mathbf{N}^T dV_A \quad (76)$$

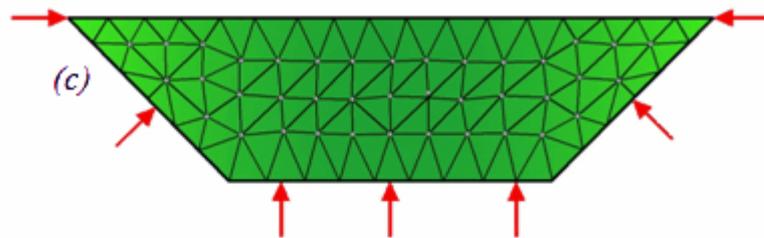
dove B è la matrice deformazione-spostamento, VA il volume scavato, N le funzioni di forma degli elementi e g il peso specifico del terreno.



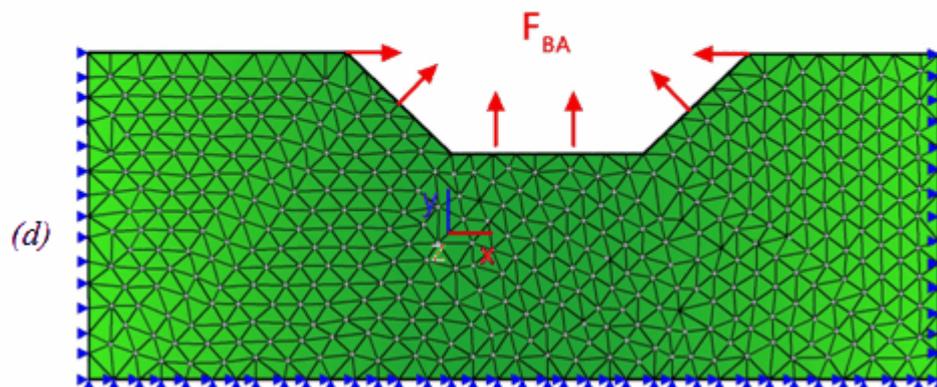
(a) Stato tensionale iniziale



(b) Forze FAB



(c)



(d)

(c) Forze FBA agenti sul volume B

(d) Forze FBA

Fig. 26. Forze di scavo

3.8.6 Peso gravitazionale

Il vettore peso gravitazionale P_a è generato elemento per elemento da un integrale del tipo:

$$P_a = \sum_{i=1}^{N_{\text{elementi}}} \gamma \iint N^T dx dy \quad (77)$$

dove g definisce la densità del materiale dell'elemento ed N la matrice funzione di forma. Questi calcoli sono effettuati nella stessa parte del programma in cui si genera la matrice globale di rigidezza.

3.9 Strategie di Assemblaggio e Memorizzazione

La matrice totale del sistema (matrice delle rigidezze globale) è definita simmetrica purché le matrici costituenti siano simmetriche. La matrice, inoltre, possiede la proprietà di essere una matrice a banda ovvero i termini sono concentrati in prossimità della diagonale principale. Le metà simmetriche di una matrice a banda sono memorizzate in un vettore rettangolare con dimensione pari al numero di equazioni del sistema per il numero dell'ampiezza della semibanda più uno. In questo caso gli zero sono inseriti nelle posizioni supplementari nelle prime o nelle ultime righe a seconda di dove sia memorizzata la metà inferiore o superiore della matrice.

Uno schema di memorizzazione speciale è la tecnica "skyline" implementata dal *Software*, ideale per ridurre la quantità di memoria richiesta. Ha l'effetto di ridurre il numero dei termini zero che potrebbero essere memorizzati nella matrice delle rigidezze dovuta alla variabilità dell'ampiezza della banda utilizzando i metodi di memorizzazione convenzionali.

3.10 Incorporazione delle condizioni al contorno

Una volta assemblate le equazioni degli elementi per ottenere il sistema di equazioni, devono essere incorporate le condizioni al contorno del problema.

3.10.1 Metodo esplicito per le BC's

Nel metodo esplicito, le condizioni al contorno (BC's) vengono incorporate attraverso l'eliminazione delle righe e delle colonne associate ai gradi di libertà bloccati. Ciò significa che le equazioni componenti il sistema, associate a quei nodi, non vengono richiamate nelle soluzioni e l'informazione è data dalla routine di assemblaggio che impedisce a queste componenti di venire inserite nel sistema finale. In questo modo solo i valori nodali diversi da zero vengono considerati.

3.10.2 Ottimizzazione vincolata (metodo di penalizzazione)

Questo metodo sfrutta il fatto che le computazioni tramite computer garantiscono una precisione comunque limitata. Le condizioni al contorno sono quindi manipolate aggiungendo un numero grande alla diagonale principale della matrice delle rigidezze nella riga in cui il valore vincolato è richiesto (per esempio un valore pari a zero significa che tutti i gradi di libertà sono bloccati). Il termine del vettore sulla riga corrispondente è quindi impostato al valore vincolato moltiplicato per il coefficiente di rigidezza aumentato. Qualsiasi grado di libertà strutturale può essere vincolato in questo modo.

Ogni vincolo aggiunge un valore grande alla diagonale della matrice delle rigidezze e anche un valore grande al vettore dei carichi se il grado di libertà prescritto è diverso da zero. Questa tipologia di procedura ha successo se termini "piccoli" si possono ritenere relativamente piccoli rispetto ai termini "grandi" (ad esempio i coefficienti della matrice delle rigidezze sono davvero molto piccoli rispetto al valore "grande" che si è assunto).

3.10.3 Supporto elastico

Questo metodo è del tutto assimilabile al metodo di penalizzazione.

La molla (*Supporto elastico*) può essere aggiunta in qualsiasi grado di libertà strutturale. Ogni molla aggiunge un valore prescritto alla diagonale principale della matrice delle rigidezze nella riga in cui tale valore viene richiesto. I supporti elastici, o molle, sono definite inserendo la costante elastica della molla nelle direzioni x ed y . La costante della molla è definita come la forza o il momento che causerebbe uno spostamento unitario nella direzione corrispondente. Una molla veramente rigida (cioè con un valore della costante di rigidezza molto grande, come 1020) deve quindi essere applicata per ottenere uno spostamento pari a zero.

3.11 Risoluzione delle equazioni di equilibrio

Una volta che le condizioni al contorno sono state incorporate al sistema di equazioni, lo step finale consiste nella determinazione degli spostamenti nodali in funzione delle variabili incognite. Le due metodologie implementate sono: la tecnica di eliminazione di Gauss, che sfrutta lo schema di memorizzazione per matrici con ampiezza di banda costante, e la tecnica di decomposizione di Cholesky associata alla strategia di memorizzazione "skyline".

4 Formulazione degli elementi Trave-Pilastro

In questa sezione si delinea la formulazione degli elementi lineari come chiodi e travi utilizzati nel programma per modellare gli elementi lineari, bulloni, ancoraggi e geosintetici.

4.1 Barre o chiodi

La Figura 27 mostra una barra rettilinea in cui i gradi di libertà ai nodi sono gli spostamenti assiali e trasversali (u_i, v_i, u_j, v_j).

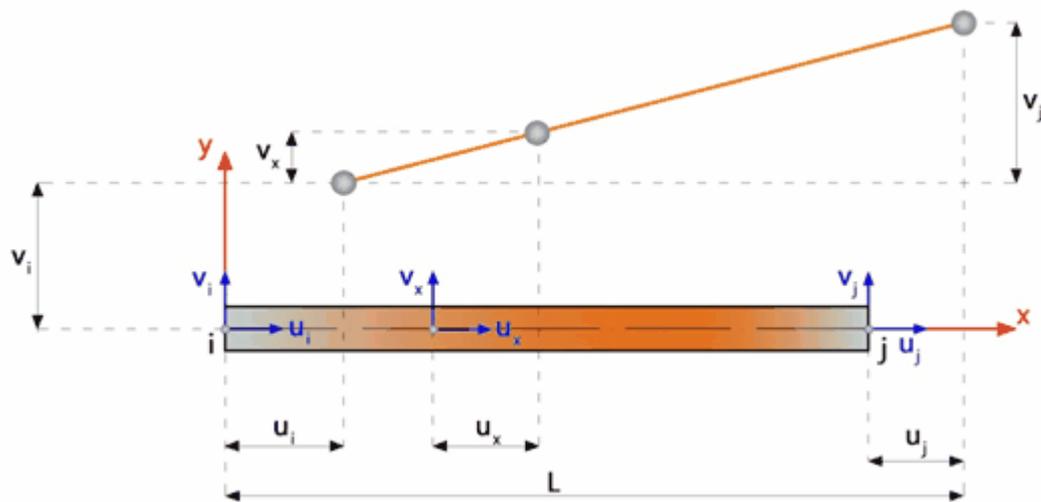


Figura 27. Chiodo.

Un campo degli spostamenti lineare è un'approssimazione appropriata:

$$\begin{aligned} u_x &= \alpha_1 + \beta_1 x \\ v_x &= \alpha_2 + \beta_2 x \end{aligned} \quad (78)$$

Imponendo le condizioni limite, il campo degli spostamenti può essere riscritto come:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad (79)$$

dove le funzioni di forma N_i sono:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \xi \\ N_2 &= \xi \end{aligned} \quad (80)$$

In cui $\xi = x/L$

La deformazione assiale dell'elemento è definita come:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad (81)$$

Oppure, in forma compatta, la relazione che intercorre tra gli spostamenti e le deformazioni può essere espressa come:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (82)$$

dove:

$$\mathbf{B} = \partial\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 \end{bmatrix} \quad (83)$$

e rappresenta l'operatore deformazione-spostamento.

La matrice delle rigidità dell'elemento è calcolata in questo caso come:

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{L} \int_0^1 \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\xi = \frac{EA}{L} \int_0^1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] d\xi = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (84)$$

dove EA rappresenta la rigidezza assiale dell'elemento, E è il modulo di Young, A l'area della sezione trasversale e L la lunghezza dell'elemento. La matrice delle rigidezze \mathbf{k} sopra definita mette in relazione le forze assiali con gli spostamenti assiali valutati entrambe ai nodi, e rappresenta la matrice delle rigidezze nel sistema di riferimento locale (degli elementi). Se la barra è orientata con un angolo di inclinazione β nel piano xy, la matrice può essere trasformata utilizzando una matrice di rotazione:

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T} \quad (85)$$

dove, per il piano xy, la matrice di rotazione è definita come:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (86)$$

La matrice delle rigidezze nelle coordinate globali del sistema diventa quindi:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin \beta \cos \beta & -\cos^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta \\ \sin \beta \cos \beta & \sin^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta & -\sin^2 \beta \\ -\cos^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta & \sin \beta \cos \beta \\ -\sin \beta \cos \beta & -\sin^2 \beta & \sin \beta \cos \beta & \sin^2 \beta \end{bmatrix} \quad (87)$$

4.2 Elemento trave-pilastro a due nodi

La Figura 28 mostra i sei gradi di libertà di un elemento rettilineo trave-pilastro. La rotazione θ si assume talmente piccola che $\theta \approx dw/dx$.

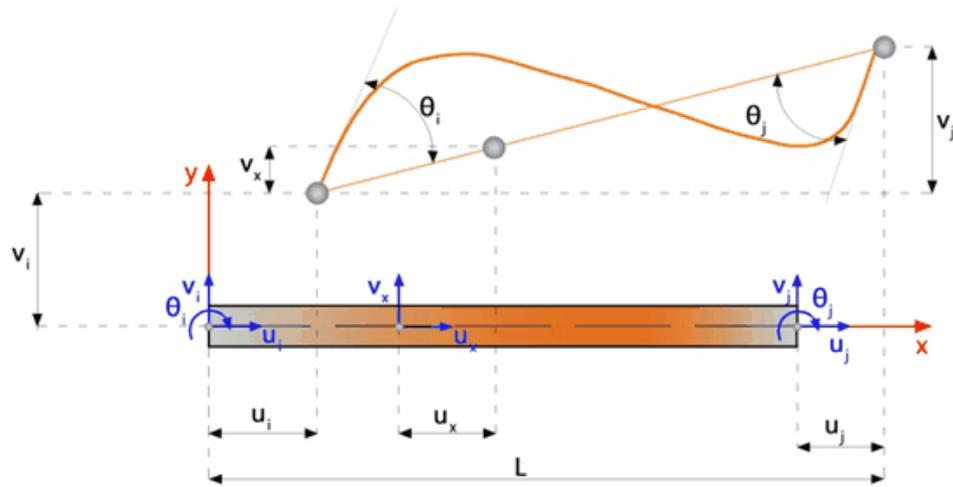


Fig. 28. Elemento trave-pilastro.

Il campo degli spostamenti lungo l'elemento si assume avere la seguente forma:

$$\begin{aligned} u_x &= \alpha + \alpha_1 x \\ v_x &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \end{aligned} \quad (88)$$

Si utilizza quindi una forma lineare per gli spostamenti assiali e un polinomio di terzo grado per gli spostamenti trasversali: la forma polinomiale di terzo grado è stata scelta per gli spostamenti trasversali poiché, per un elemento caricato soltanto nodi, le forze di taglio e la variazione del momento flettente lungo l'elemento sono costanti e lineari. Infatti:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{d^2 v}{dx^2} = 2\beta_2 + 6\beta_3 x \\ T_x &= \frac{d^3 v}{dx^3} = 6\beta_3 \end{aligned} \quad (89)$$

Imponendo le condizioni limite il campo degli spostamenti dell'elemento può essere riscritto come:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (90)$$

dove le funzioni di forma N_i in questo caso sono definite come:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \xi \\ N_2 &= \xi \\ N_3 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ N_4 &= l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ N_5 &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ N_6 &= -l(\xi^2 - \xi^3) \end{aligned} \quad (91)$$

In cui $\xi = x/L$.

Assumendo una distribuzione lineare delle deformazioni lungo la sezione trasversale (Ipotesi di sezione piana) la relazione tra deformazioni e spostamenti è:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (92)$$

Che può essere riscritta in forma matriciale come:

$$\varepsilon_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -y \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -y \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (93)$$

Oppure, in forma compatta:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (94)$$

Dove \mathbf{u} rappresenta il vettore spostamento nodale e \mathbf{B} rappresenta l'operatore deformazione-spostamento:

$$\mathbf{u} = [u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j]^T \quad (95)$$

$$\mathbf{B} = \partial\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & -y \frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} & -y \frac{\partial^2 N_4}{\partial x^2} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & -y \frac{\partial^2 N_5}{\partial x^2} & -y \frac{\partial^2 N_6}{\partial x^2} \end{bmatrix} \quad (96)$$

Oppure con le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \end{aligned} \quad (97)$$

Assumendo una sezione piana doppiamente simmetrica, la matrice delle rigidità dell'elemento può essere calcolata come:

$$\mathbf{k} = \int_A \int_0^1 \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\xi dA = \int_A \int_0^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \\ -\frac{y}{L^2} \frac{\partial^2 N_3}{\partial \xi^2} \\ -\frac{y}{L^2} \frac{\partial^2 N_4}{\partial \xi^2} \\ \frac{1}{L} \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \\ -\frac{y}{L^2} \frac{\partial^2 N_5}{\partial \xi^2} \\ -\frac{y}{L^2} \frac{\partial^2 N_6}{\partial \xi^2} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & -\frac{y}{L^2} \frac{\partial^2 N_3}{\partial \xi^2} & -\frac{y}{L^2} \frac{\partial^2 N_4}{\partial \xi^2} & \frac{1}{L} \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & -\frac{y}{L^2} \frac{\partial^2 N_5}{\partial \xi^2} & -\frac{y}{L^2} \frac{\partial^2 N_6}{\partial \xi^2} \end{bmatrix} d\xi dA \quad (99)$$

In cui sono definiti il momento di inerzia I e l'area della sezione trasversale A :

$$\begin{aligned} I &= \int_A y^2 dA \\ A &= \int_A dA \end{aligned} \quad (100)$$

Per valori costanti del prodotto EI, la matrice delle rigidezze dell'elemento è data dall'Equazione (99):

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (101)$$

Una leggera modifica all'Equazione 101 consente di tener conto della deformazione trasversale di taglio (Trave di Timoshenko), in modo da ottenere:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3(1+\Phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\Phi)} & 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+\Phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\Phi)} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2(1+\Phi)} & \frac{(4+\Phi)EI}{L(1+\Phi)} & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+\Phi)} & \frac{(2-\Phi)EI}{L(1+\Phi)} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+\Phi)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\Phi)} & 0 & \frac{12EI}{L^3(1+\Phi)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\Phi)} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2(1+\Phi)} & \frac{(2-\Phi)EI}{L(1+\Phi)} & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+\Phi)} & \frac{(4+\Phi)EI}{L(1+\Phi)} \end{bmatrix} \quad (102)$$

dove $\Phi = \frac{12EI}{GA_s L^2}$, in cui G rappresenta il modulo di taglio, A_s la sezione di taglio e il prodotto GA_s rappresenta la rigidezza al taglio.

Se la trave è inclinata di un angolo β rispetto all'asse X delle coordinate globali, la matrice delle rigidezze dell'elemento, nel sistema di coordinate globali, è definita come:

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T} \quad (103)$$

dove la matrice di rotazione T ha la seguente espressione:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (104)$$

4.3 Unione di una trave con un elemento piano. Elementi dissimili

Con elementi dissimili si intendono elementi che hanno gradi di libertà di diverso tipo e/o dislocati in posizione diversa.

Ad esempio, considerando gli elementi descritti nella Figura 29, la parte terminale sinistra dell'elemento trave è attaccata in una posizione arbitraria lungo un lato dell'elemento quadrangolare piano a 4 nodi, oppure si potrebbe ipotizzare di collegare un elemento chiodo in un qualsiasi punto collocato sul bordo (o all'interno) di un elemento piano a 4 nodi.

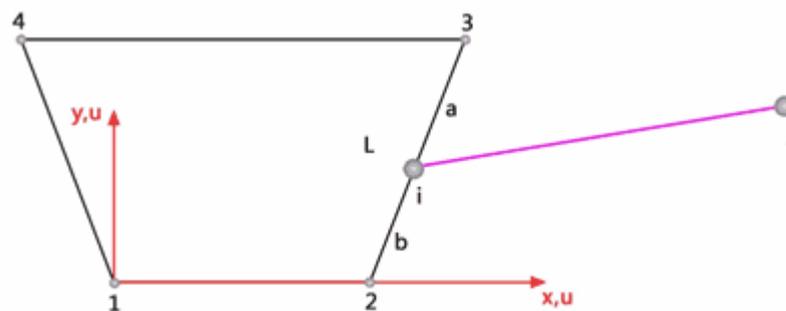


Fig. 29. Elementi dissimili.

Un modo per affrontare queste situazioni è di apporre dei vincoli che obblighino i gradi di libertà degli elementi di accoppiamento ad avere un rapporto prestabilito tra loro. Un metodo per connettere questi elementi è brevemente descritto nella seguente sezione.

4.3.1 Elemento trave connesso ad un elemento piano

La relazione di rigidità dell'elemento trave-pilastro è:

$$\mathbf{k}'\mathbf{u}' = \mathbf{r}' \quad (105)$$

Dove i vettori spostamento e carico nodale sono definiti:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= [u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j]^T \\ \mathbf{r}' &= [f_{ix} \quad f_{iy} \quad m_i \quad f_{jx} \quad f_{jy} \quad m_j]^T \end{aligned} \quad (106)$$

Si assume che gli spostamenti traslazionali ai nodi i dell'elemento trave-pilastro siano interpolati linearmente lungo il tratto 2-3 dai gradi di libertà traslazionali dei nodi 2 e 3 dell'elemento piano e che la rotazione θ_i sia la stessa di quella del lato 2-3.

In queste condizioni gli spostamenti nodali possono essere scritti come:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{T}\mathbf{u} \quad (107)$$

Dove, con $c = \cos \beta$ e $s = \sin \beta$.

La matrice T di trasformazione è:

$$\mathbf{T}_{[6 \times 7]} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{3[4 \times 3]} & \mathbf{0}_{[4 \times 3]} \\ \mathbf{0}_{[3 \times 3]} & \mathbf{I}_{[3 \times 3]} \end{bmatrix}, \text{ dove } \mathbf{T}_{3[4 \times 3]} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & s & -c & -s \end{bmatrix} \quad (108)$$

mentre il vettore spostamento \mathbf{u} , che contiene gli spostamenti dell'elemento piano e gli spostamenti dei nodi liberi j dell'elemento trave-pilastro, è:

$$\mathbf{u} = [u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j]^T \quad (109)$$

Applicando il principio degli spostamenti virtuali, se tra gli spostamenti \mathbf{u} e \mathbf{u}' vale la relazione 107, allora per i vettori forza nodale \mathbf{r} ed \mathbf{r}' si può scrivere una relazione simile:

$$\mathbf{r} = \mathbf{T}^T \mathbf{r}' \quad (110)$$

Si può dimostrare che, dato che \mathbf{r} e \mathbf{r}' descrivono la stessa risultante delle forze, il lavoro compiuto dalle forze durante uno spostamento virtuale stabilito deve essere indipendente dal sistema di coordinate in cui il lavoro

viene calcolato. In queste condizioni, moltiplicando entrambi i termini dell'Equazione 105 per \mathbf{T}^T e sfruttando l'Equazione 107 per calcolare il vettore spostamento \mathbf{u}' , l'Equazione 105 diventa:

$$\mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T} \mathbf{u} = \mathbf{T}^T \mathbf{r}' \quad (111)$$

che in forma compatta è:

$$\mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{r} \quad (112)$$

Dove la matrice delle rigidezze modificata relativa all'elemento trave-pilastro è:

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T} \quad (113)$$

A questo punto l'elemento piano e l'elemento trave-pilastro possono essere assemblati l'uno con l'altro o assemblati al resto della struttura. Il nodo i e i suoi gradi di libertà non appaiono nelle strutture assemblate. Il nodo i può essere definito nodo "slave" perché i suoi gradi di libertà sono completamente determinati dai gradi di libertà dei nodi "master" 2 e 3. Una relazione simile si può ottenere nel caso in cui l'elemento trave-pilastro è collocato all'interno di un elemento piano di ordine superiore. In questo caso gli spostamenti nodali dell'elemento trave sono interpolati attraverso una funzione quadratica dai gradi di libertà traslazionali dei nodi dell'elemento piano.

4.3.2 Elemento chiodo connesso ad un elemento piano

Si considera un elemento chiodo collegato in un qualsiasi punto del bordo di un elemento piano a 4 nodi (Figura 30).

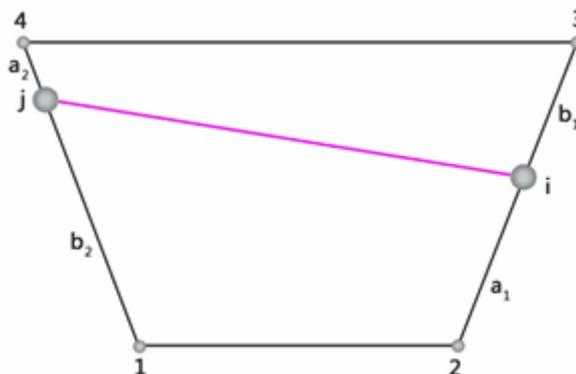


Fig. 30. Chiodo connesso ad un elemento piano

La relazione deformazione-rigidezza per i chiodi può essere scritta come:

$$\mathbf{k}'\mathbf{u}' = \mathbf{r}' \quad (114)$$

Dove \mathbf{k}' , \mathbf{u}' e \mathbf{r}' rappresentano rispettivamente la matrice delle rigidezze, il vettore spostamento e il vettore forze nodali associati ai gradi di libertà dei nodi i e j dell'elemento chiodo.

Il vettore spostamento è definito come:

$$\mathbf{u}' = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j]^T \quad (115)$$

Con gli spostamenti interpolati linearmente lungo i bordi del quadrilatero, la trasformazione del vettore spostamento dei nodi dell'elemento chiodo \mathbf{u}' è dato dalla matrice di trasformazione \mathbf{T} e dal vettore spostamento dei nodi dell'elemento piano \mathbf{u} , come:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{T}\mathbf{u} \quad (116)$$

Dove la matrice di trasformazione \mathbf{T} contiene termini come quelli riportati nell'Equazione 108. Per il caso descritto nella Figura 30 la relazione di trasformazione degli spostamenti può essere espressa in forma matriciale come segue:

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1/l_1 & 0 & a_1/l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1/l_1 & 0 & a_1/l_1 & 0 & 0 \\ a_2/l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2/l_2 & 0 \\ 0 & a_2/l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2/l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (117)$$

In seguito alla trasformazione, \mathbf{k}' e \mathbf{r}' dell'elemento chiodo devono essere convertite in \mathbf{k} e \mathbf{r} a cui sono associati tramite i gradi di libertà dei 4 nodi dei vertici dell'elemento quadrangolare.

Così, $\mathbf{r}'_{[4 \times 1]}$ diventa $\mathbf{r}_{[8 \times 1]}$ e $\mathbf{k}'_{[4 \times 4]}$ diventa $\mathbf{k}_{[8 \times 8]}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{[8 \times 8]} &= \mathbf{T}_{[8 \times 4]}^T \mathbf{k}'_{[4 \times 4]} \mathbf{T}_{[4 \times 8]} \\ \mathbf{r}_{[8 \times 1]} &= \mathbf{T}_{[8 \times 4]}^T \mathbf{r}'_{[4 \times 1]}\end{aligned}\quad (118)$$

Solo ora è quindi possibile sommare il vettore forza nodale e la matrice delle rigidezze ai corrispondenti vettori dell'elemento quadrangolare o assemblati nella struttura. I nodi i e j del chiodo e i suoi gradi di libertà non sono esplicitamente presenti. Si può dire che i gradi di libertà della barra sono costretti a seguire i gradi di libertà del quadrilatero.

Una relazione simile si può ottenere nel caso in cui il chiodo è collocato all'interno di un elemento piano di ordine superiore. In questo caso gli spostamenti nodali del chiodo sono interpolati quadraticamente dai gradi di libertà traslazionali dei nodi dell'elemento piano.

Ad esempio assumendo un elemento di ordine superiore quadrangolare ad 8 nodi, attraversato da un elemento chiodo, la relazione di trasformazione dello spostamento è:

$$\mathbf{u}'_{[4 \times 1]} = \mathbf{T}_{[4 \times 12]} \mathbf{u}_{[12 \times 1]} \quad (119)$$

In cui:

$$\mathbf{u}'_{[4 \times 1]} = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j]^T \quad (120)$$

$$\mathbf{u}_{[12 \times 1]} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad u_5 \quad v_5 \quad u_6 \quad v_6]^T \quad (121)$$

$$\mathbf{T}_{[4 \times 12]} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \beta_1 & 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \beta_1 & 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & \beta_2 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & \beta_2 & 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (122)$$

Dove:

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= 2\left(\frac{b_i}{l_i}\right)^2 - 3\left(\frac{b_i}{l_i}\right) + 1 \\
 \beta_i &= 4\left(\frac{b_i}{l_i}\right) - 4\left(\frac{b_i}{l_i}\right)^2 \\
 \gamma_i &= 2\left(\frac{b_i}{l_i}\right)^2 - \left(\frac{b_i}{l_i}\right)
 \end{aligned}
 \tag{123}$$

Questo approccio può sempre essere applicato quando i nodi dei chiodi ricadono all'interno dell'elemento piano.

Considerando invece un chiodo con i nodi i e j ricadenti nell'elemento triangolare a 3 nodi come mostrato nella Figura 31:

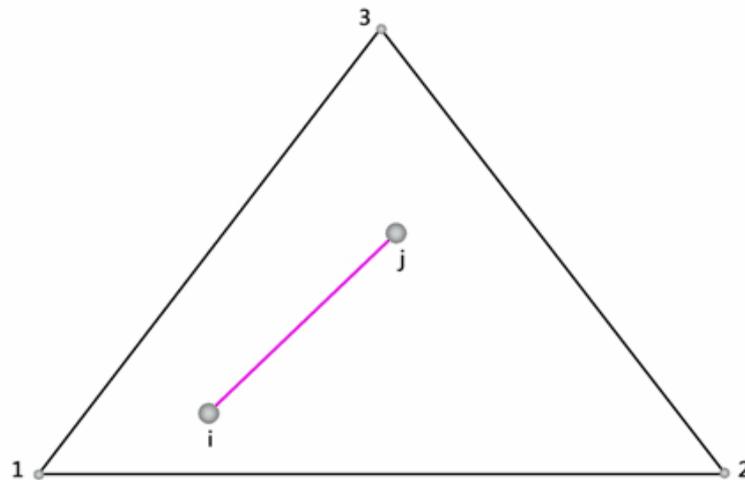


Fig. 31-Chiodo all'interno di un elemento piano triangolare.

gli spostamenti degli elementi nodali si possono ottenere attraverso le funzioni di forma degli elementi "genitori" come:

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^i & 0 & N_2^i & 0 & N_3^i & 0 \\ 0 & N_1^i & 0 & N_2^i & 0 & N_3^i \\ N_1^j & 0 & N_2^j & 0 & N_3^j & 0 \\ 0 & N_1^j & 0 & N_2^j & 0 & N_3^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}
 \tag{124}$$

Dove $N_k^{i(j)}$, $k=1,2,3$ rappresenta le funzioni di forma per l'elemento triangolare stimate per ogni coordinata dei nodi del chiodo.

Quindi la matrice delle rigidezze e il vettore forze nodali si ottengono nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{[6 \times 6]} &= \mathbf{T}_{[6 \times 4]}^T \mathbf{k}'_{[4 \times 4]} \mathbf{T}_{[4 \times 6]} \\ \mathbf{r}_{[6 \times 1]} &= \mathbf{T}_{[6 \times 4]}^T \mathbf{r}'_{[4 \times 1]}\end{aligned}\quad (125)$$

Dove la matrice di trasformazione è:

$$\mathbf{T}_{[4 \times 6]} = \begin{bmatrix} N_1^i & 0 & N_2^i & 0 & N_3^i & 0 \\ 0 & N_1^i & 0 & N_2^i & 0 & N_3^i \\ N_1^j & 0 & N_2^j & 0 & N_3^j & 0 \\ 0 & N_1^j & 0 & N_2^j & 0 & N_3^j \end{bmatrix} \quad (126)$$

Matrici di trasformazione simili si possono ottenere tutte le volte che si utilizzano elementi di forma quadrangolare oppure elementi piani di ordine superiore. Le funzioni di forma sono valutate nei nodi dell'elemento chiodo di coordinate note.

Di solito queste coordinate sono fornite in coordinate globali laddove le funzioni di forma degli elementi piani sono date nel sistema di coordinate naturali. Pertanto sono necessarie alcune trasformazioni per ottenere le coordinate dei nodi del chiodo nel sistema di coordinate naturali.

Queste trasformazioni si basano sul carattere isotropo dell'elemento piano utilizzato. Per gli elementi triangolari le coordinate globali (x, y) e le coordinate naturali (ξ, η) sono messe in relazione come segue:

$$\begin{aligned}x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3\end{aligned}\quad (127)$$

In cui x_i, y_i ($i=1,2,3$) rappresentano le coordinate dei nodi dell'elemento triangolare e la funzione di forma N_i ha la seguente espressione, rappresentata nel sistema di coordinate naturali:

$$N_1 = \xi, \quad N_2 = \eta, \quad N_3 = 1 - \xi - \eta \quad (128)$$

Per le coordinate note x e y si possono ricavare le corrispondenti coordinate naturali risolvendo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_3 \\ y - y_3 \end{bmatrix} \quad (129)$$

In maniera del tutto simile si possono ottenere le coordinate naturali nel caso in cui l'elemento piano è rappresentato da un elemento quadrangolare.

4.3.3 Gli elementi "bulloni"

I bulloni passano attraverso gli elementi della mesh e sono modellati come uno o una serie di elementi chiodo (Figura 32).

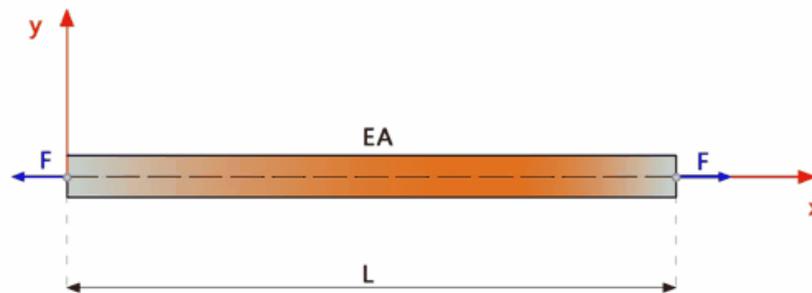


Fig. 32. Bullone.

Sono disponibili per la modellazione due tipologie di bulloni: con l'estremità ancorata o completamente bloccati.

4.3.3.1 Bulloni ancorati all'estremità

Questo tipo di elemento è rappresentato da un elemento chiodo deformabile che comporta come un singolo elemento e l'interazione con la mesh di elementi finiti avviene soltanto attraverso il punto finale dell'elemento.

Questi elementi si possono assegnare dovunque nel reticolo e sono quindi rappresentati nella mesh (Figura 33). La matrice delle rigidezze degli ancoraggi è sommata alla matrice delle rigidezze della struttura come si mostra in questa sezione.

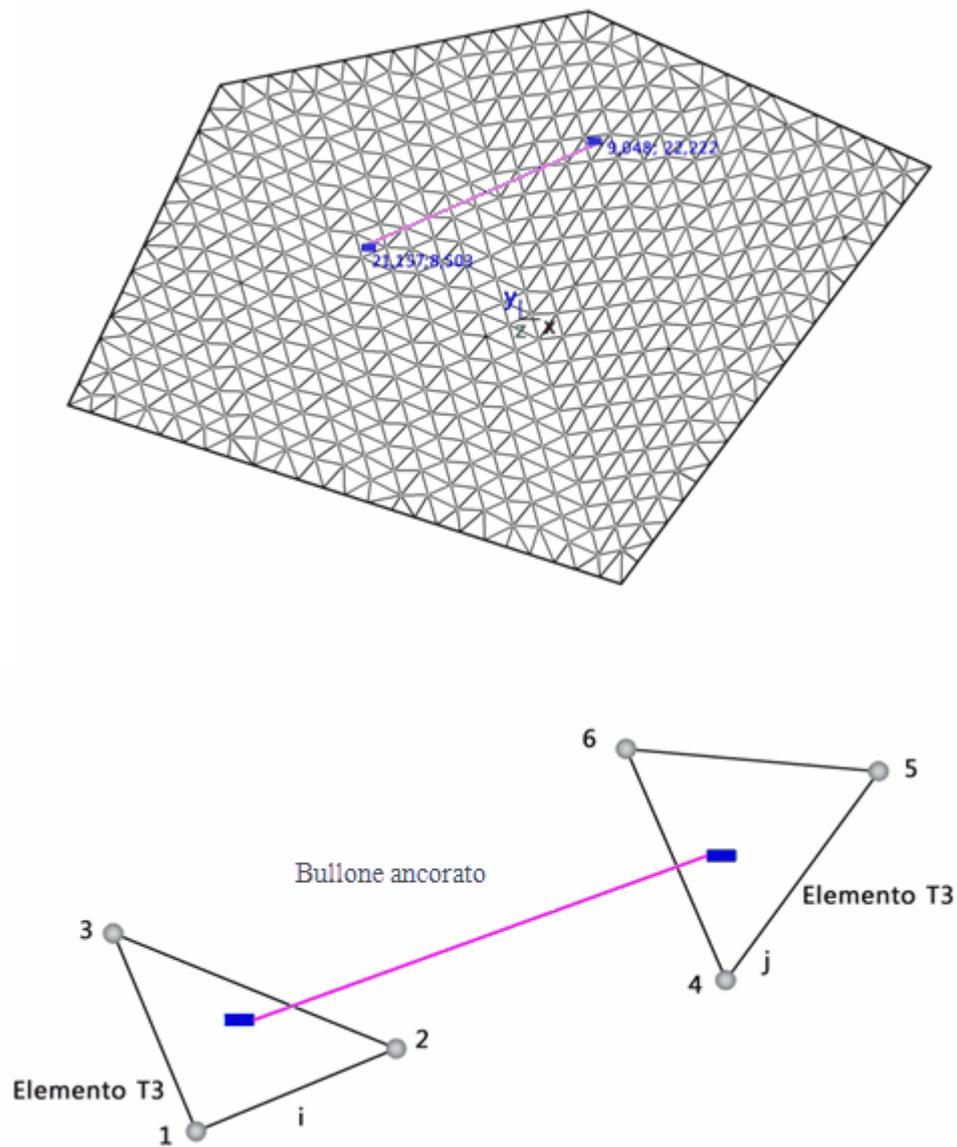


Fig. 33. Bullone ancorato all'estremità.

I gradi di libertà degli elementi ancorati sono calcolati in funzione degli spostamenti nodali dell'elemento piano in cui i nodi finali di ancoraggio ricadono:

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^1 & 0 & N_2^1 & 0 & N_3^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1^1 & 0 & N_2^1 & 0 & N_3^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1^2 & 0 & N_2^2 & 0 & N_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1^2 & 0 & N_2^2 & 0 & N_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{bmatrix} \quad (130)$$

Oppure in forma compatta:

$$\mathbf{u}_{anchor[4x1]} = \mathbf{T}_{[4x12]} \mathbf{u}_{plane\ elements[12x1]} \quad (131)$$

In seguito, la matrice delle rigidezze dell'ancoraggio e il vettore delle forze nodali sono così valutati:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{[12x12]} &= \mathbf{T}_{[12x4]}^T \mathbf{k}'_{[4x4]} \mathbf{T}_{[4x12]} \\ \mathbf{r}_{[12x1]} &= \mathbf{T}_{[12x4]}^T \mathbf{r}'_{[4x1]} \end{aligned} \quad (132)$$

Eseguita questa trasformazione, il vettore delle forze nodali e la matrice delle rigidezze possono essere direttamente sommati ai corrispondenti matrice e vettore degli elementi piani "genitori" oppure assemblati nella struttura.

I nodi i e j dell'elemento 'bullone' e i suoi gradi di libertà non sono esplicitamente presenti, si può dire infatti che i gradi di libertà della barra sono vincolati in modo da seguire i gradi di libertà degli elementi piani "genitore". Anche gli altri casi legati agli elementi di ordine superiore oppure ad elementi quadrangolari possono essere considerati allo stesso modo.

La forza assiale F nell'ancoraggio è calcolata dalla relazione che lega la rigidezza con lo spostamento espressa nel sistema locale come:

$$\begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{xj} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad (133)$$

In cui gli spostamenti ai nodi i e j sono calcolati in funzione degli spostamenti nodali degli elementi piani "genitori" attraverso le funzioni di forma.

Ad esempio, considerando un elemento triangolare a 3 nodi (Figura 33) gli spostamenti in ogni nodo, nel sistema di coordinate globale, sono espressi come:

$$\begin{aligned} {}_g u_i &= N_1^1 u_1 + N_2^1 u_2 + N_3^1 u_3 \\ {}_g v_i &= N_1^1 v_1 + N_2^1 v_2 + N_3^1 v_3 \\ {}_g u_j &= N_1^2 u_4 + N_2^2 u_5 + N_3^2 u_6 \\ {}_g v_j &= N_1^2 v_4 + N_2^2 v_5 + N_3^2 v_6 \end{aligned} \quad (134)$$

Dove N_i^k rappresenta le funzioni di forma calcolate per ciascun elemento piano associato all'elemento con l'estremità ancorata.

Questi spostamenti sono trasformati nel sistema di coordinate locali tramite la matrice di trasformazione (Equazione 131) come:

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} {}_g u_i \\ {}_g v_i \\ {}_g u_j \\ {}_g v_j \end{bmatrix} \quad (135)$$

In ultimo, con gli spostamenti assiali locali calcolati utilizzando le equazioni scritte sopra, le forze assiali lungo l'ancoraggio si determinano usando l'Equazione 133.

Nel programma sono stati implementati gli ancoraggi con comportamento lineare e elasto-plastico.

Nel primo caso l'ancoraggio ha un comportamento elastico e la rottura non avviene. Nel secondo caso, la rottura dell'elemento è funzione della resistenza a trazione del materiale del bullone (Figura 34). Quando la forza assiale nell'elemento raggiunge lo snervamento, l'elemento si considera rotto e non interviene nessuna resistenza residua.

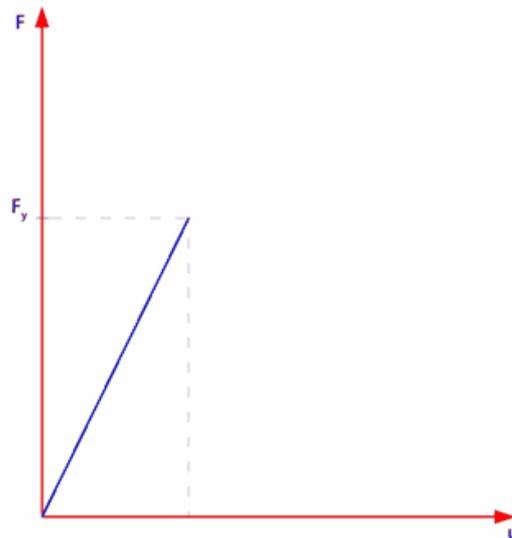


Fig.34. Criterio di rottura.

4.3.3.2 Bullone completamente vincolato

I bulloni completamente vincolati si caratterizzano in funzione dei punti in cui il bullone attraversa la mesh di elementi finiti. Si assume una perfetta aderenza tra l'elemento bullone e l'elemento piano attraversato. Questi bulloni agiscono indipendentemente l'uno dall'altro.

Gli elementi bullone completamente vincolati non si influenzano tra loro direttamente ma solo indirettamente attraverso l'effetto che essi hanno sugli elementi piani (Figura 35).

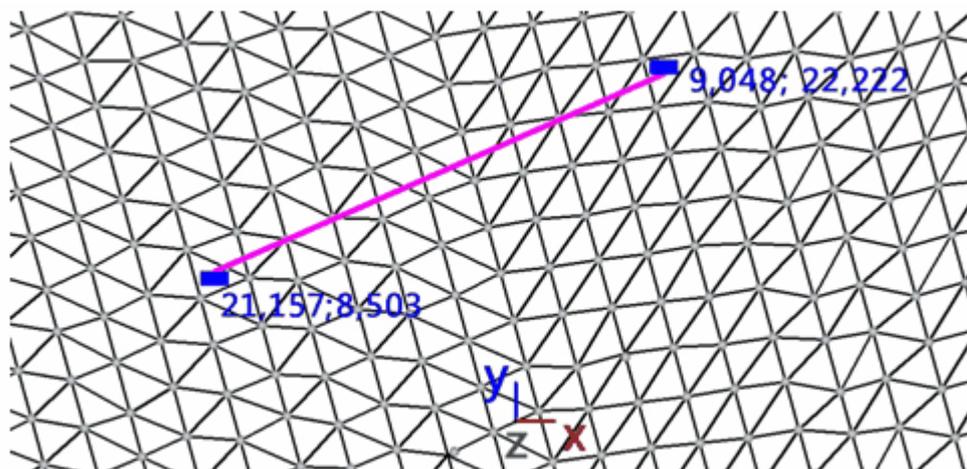


Fig. 35. Bullone completamente bloccato.

La matrice delle rigidezze del bullone e il vettore delle forze nodali sono determinati come già descritto nella sezione 4.3.2, in funzione della matrice di trasformazione che dipende dalle funzioni di forma dell'elemento piano attraversato.

La forza assiale lungo il bullone è determinata dagli spostamenti assiali relativi dell'elemento come scritto di seguito:

$$F_{bolt} = \frac{EA}{L}(u_j - u_i) \quad (136)$$

Dove u_j e u_i rappresentano gli spostamenti assiali locali determinati ai nodi terminali come nella sezione 4.3.2. Quando si seleziona un comportamento plastico per i bulloni completamente bloccati, la rottura dello stesso si assume che avvenga se la forza assiale F_{bolt} eccede la resistenza allo snervamento del materiale. In questo caso nessuna forza residua è disponibile (Fig. 34).

4.3.4 Gli elementi lineari

Gli elementi lineari sono composti dagli elementi trave-pilastro con 3 gradi di libertà per nodo: due gradi di libertà per la traslazione (u , v) e un grado di libertà per la rotazione (rotazione θ nel piano x - y) per ciascun nodo.

Gli elementi lineari si basano sulla teoria delle travi di Bernoulli o Timoshenko, per cui le deformazioni sono dovute sia al taglio che alla flessione. Il momento flettente, le forze di taglio e le forze assiali negli elementi sono stimati in funzione degli spostamenti nodali e delle rotazioni determinati nelle parti terminali dei nodi assegnati nel reticolo di calcolo ad elementi finiti (mesh). I nodi degli elementi lineari coincidono con i nodi della struttura generale della mesh. In questo modo fra le traslazioni degli elementi lineari e gli spostamenti nella mesh a elementi finiti esiste una perfetta compatibilità. I gradi di libertà per la traslazione dei nodi sono quindi condivisi sia dagli elementi piani che da quelli trave-pilastro, mentre il grado di libertà per la rotazione sono associati solo a quelli degli elementi trave-pilastro (elementi lineari).

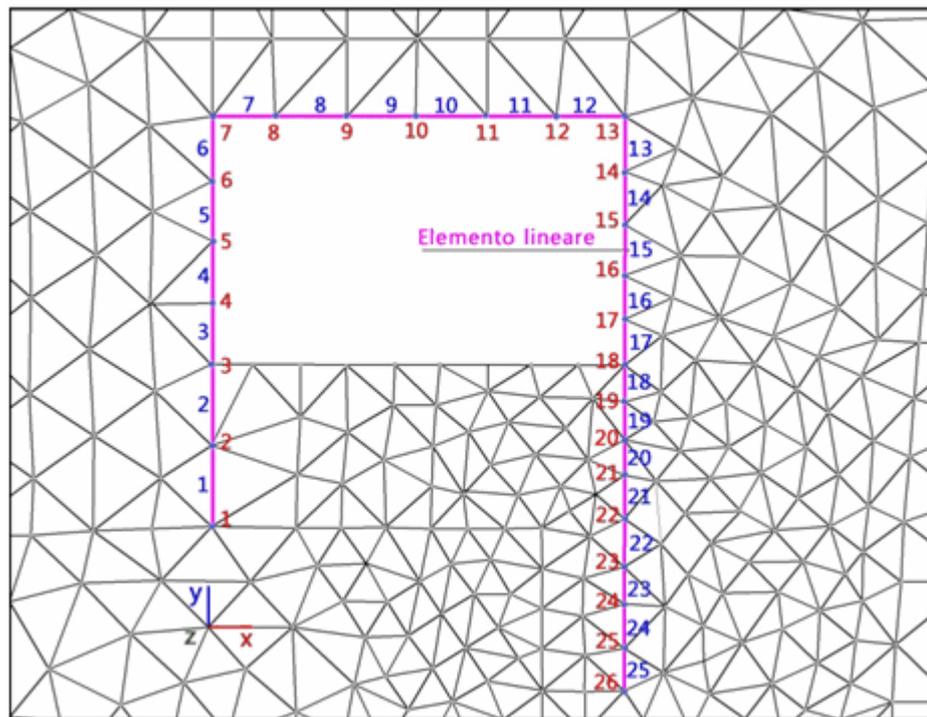


Fig.36. Elementi lineari

4.3.5 Le geogriglie

Le geogriglie sono strutture sottili con rigidità normale ma senza rigidità flessionale (Chiodo) usate per modellare i rinforzi del terreno (Figura 37). Le geogriglie sono composte da chiodi con due gradi di libertà per la traslazione in ciascun nodo (u , v). Questi gradi di libertà alla traslazione sono condivisi nei nodi sia dagli elementi piani che dai chiodi. Le forze assiali nelle geogriglie sono determinate in funzione degli spostamenti assiali relativi ai nodi. La formulazione dell'elemento geogriglia è simile al bullone completamente bloccato, ma poiché i nodi degli elementi piani e i nodi delle geogriglie coincidono, non è necessario effettuare le trasformazioni dei vincoli, come nel caso dei bulloni. Gli elementi devono avere un comportamento plastico e in questo caso un elemento si dice che abbia ceduto quando la forza assiale superi la resistenza allo snervamento assiale dell'elemento.

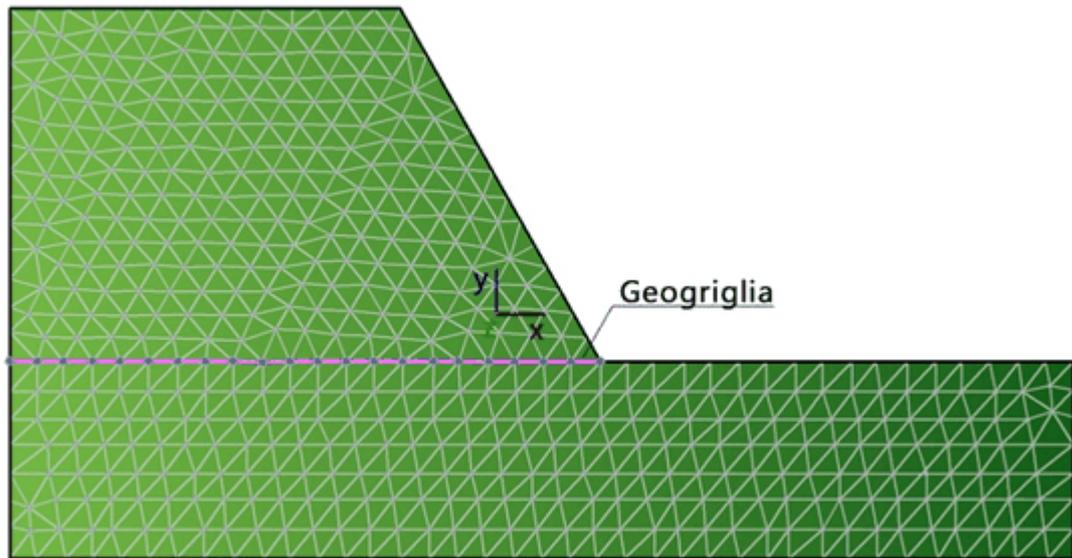


Fig.37. Geogriglie (Geotextile).

5 Formulazione dell'analisi non lineare

5.1 Comportamento anelastico tensione-deformazione

Un materiale è detto non lineare se la relazione tra tensioni e deformazioni è rappresentata da una matrice di variabili dipendenti piuttosto che da una matrice di coefficienti costanti come per il caso lineare. Il flusso plastico rappresenta una delle cause della non linearità di un materiale. Durante la deformazione plastica il materiale può fluire in maniera "associata" per cui il vettore dell'incremento della deformazione plastica può essere normale alla superficie di cedimento o di rottura. In modo alternativo, la normalità non esiste e il flusso può anche essere "non associato". Per materiali attritivi, per cui lo stato ultimo è descritto dal criterio di rottura di Mohr-Coulomb, sono preferibili le leggi del flusso "non associato" e la deformazione plastica è descritta dalla funzione potenziale plastico. Al fine di formulare una descrizione teorica, devono essere affrontate tre tematiche principali: il criterio di rottura, la legge di flusso e la legge di incrudimento.

5.1.1 Criterio di resistenza

Il criterio o la funzione di resistenza, definisce lo stato di sollecitazione in cui la risposta del materiale cambia da elastica a plastica. Si definisce la funzione di resistenza F , che è funzione delle tensioni σ e delle quantità α e W_p che controllano l'incrudimento.

$$F = F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, W_p) \quad (137)$$

Se si valuta F si possono ottenere i seguenti risultati:

$F < 0$, condizione elastica;

$F = 0$, lo snervamento sta iniziando oppure è già in atto;

$F > 0$, condizione fisicamente impossibile.

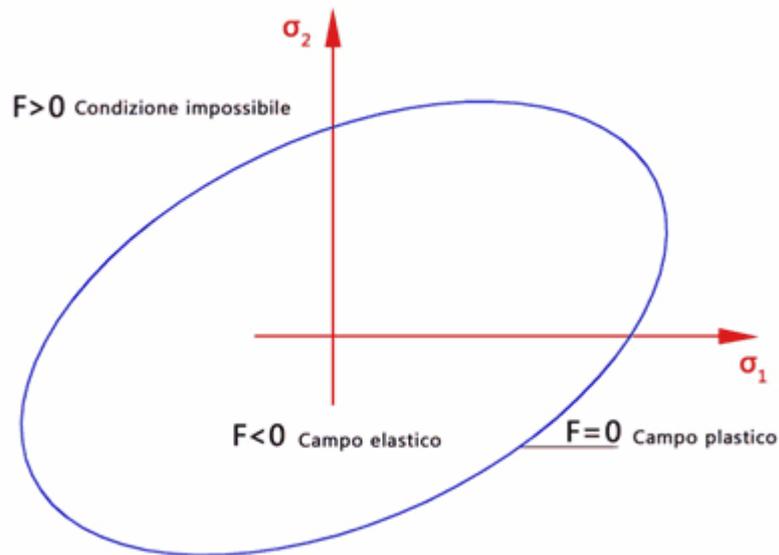


Fig. 38. Superficie di snervamento

5.1.2 Legge del flusso plastico

Le leggi del flusso plastico mettono in relazione gli incrementi di deformazione plastica con gli incrementi delle tensioni in seguito all'insorgenza del cedimento iniziale. Si definisce il potenziale plastico Q funzione delle tensioni e del lavoro plastico W_p (per unità di volume), cioè $Q=Q(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, W_p)$.

Gli incrementi della deformazione plastica (legge del flusso plastico) sono dati da:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda \quad (138)$$

dove $d\lambda$ rappresenta uno scalare che può essere chiamato "moltiplicatore plastico". Così:

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_x^p &= \frac{\partial Q}{\partial \sigma_x} d\lambda \\
 d\varepsilon_y^p &= \frac{\partial Q}{\partial \sigma_y} d\lambda \\
 &\dots \\
 d\gamma_{xz}^p &= \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{xz}} d\lambda
 \end{aligned}
 \tag{139}$$

Questa legge è conosciuta come legge di normalità del flusso plastico perché le relazioni sopra riportate possono essere interpretate nel senso che il vettore degli incrementi delle deformazioni plastiche sono normali alla superficie snervamento (Figura 39). La legge di flusso si dice "associata" se Q è pari ad F , e "non associata" altrimenti. Le leggi di flusso associate sono comunemente utilizzate per i metalli duttili, mentre le leggi non associate sono più adatte a modellare il terreno e i materiali granulari.

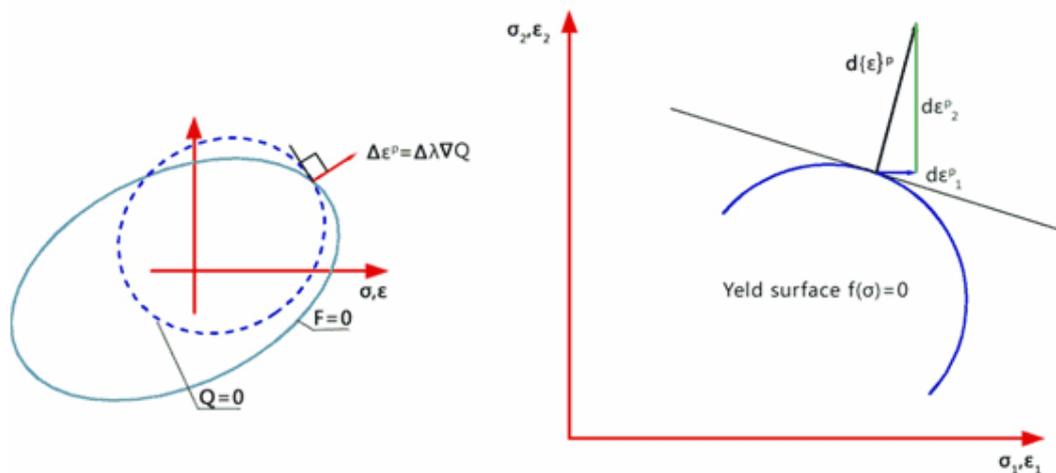


Fig. 39. (a) Rappresentazione geometrica dell'incremento di deformazione plastica;
(b) Legge di normalità del flusso plastico.

5.1.3 Legge di incrudimento

La legge di incrudimento prevede la variazione della superficie di snervamento a causa delle deformazioni plastiche. Si possono formulare due leggi di incrudimento:

- *Incrudimento isotropo*: con cui si ignora l'effetto di Bauschinger ma si espande o contrae il range elastico, senza cambiamento di forma né di posizione.
- *Incrudimento cinematico*: che tiene conto dell'effetto di Bauschinger, ma il range elastico resta costante, assistendo soltanto ad una traslazione rigida della superficie.

L'incrudimento isotropo può essere rappresentato dal lavoro plastico per unità di volume come (Equazione 140):

$$W_p = \int d\boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (140)$$

5.2 Relazioni Tensione-Deformazione incrementali

Si assume che gli incrementi di deformazione includano componenti sia elastiche sia plastiche e che tali incrementi siano molto piccoli. È possibile determinare una relazione incrementale tensione-deformazione analoga alla relazione di elasticità $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}$.

Durante un incremento della deformazione plastica, $dF=0$ e così:

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}} d\boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial F}{\partial W_p} dW_p = 0 \quad (141)$$

Per sostituzione:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}d\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{E}(d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p) = \mathbf{E}\left(d\boldsymbol{\varepsilon}^e - \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda\right) \quad (142)$$

L'equazione risultante da risolvere per ottenere il moltiplicatore plastico è:

$$d\lambda = \mathbf{P}_\lambda d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (143)$$

dove \mathbf{P}_λ è un vettore in cui sono inclusi sia il lavoro di incrudimento sia il lavoro di deformazione come segue:

$$\mathbf{P}_\lambda = \frac{\frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{E}}{\frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial W_p} \boldsymbol{\sigma}^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (144)$$

Per cui riordinando i termini si ha:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{E}_{ep} d\boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{E}_{ep} &= \mathbf{E} \left(\mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{P}_\lambda \right) \end{aligned} \quad (145)$$

Dove \mathbf{I} è una matrice unitaria e \mathbf{E}_{ep} è la matrice costitutiva tangente generalizzata.

Se $Q=F$ (in aggiunta alla legge del flusso), la matrice \mathbf{E}_{ep} risulta simmetrica. Per $F < 0$ (non si verifica lo snervamento) o per $F=0$ e $dF < 0$ (fase di scarico dello stato plastico) allora \mathbf{E}_{ep} è pari a \mathbf{E} .

La matrice delle rigidezze tangente \mathbf{k}_t è data dall'Equazione 146:

$$\mathbf{k}_t = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}_{ep} \mathbf{B} dV \quad (146)$$

5.3 Criteri di rottura

Nel *Software* sono stati inseriti, e, perciò, resi disponibili alla modellazione diversi criteri di rottura, come i criteri di Von Mises, di Mohr-Coulomb e di Tresca.

5.3.1 Il criterio di Von-Mises

Il criterio considera tutte e tre le direzioni principali dello sforzo di taglio. In questo caso la funzione di snervamento è data da:

$$F(J_2) = \sqrt{J_2} - k \quad (147)$$

oppure, in termine della cosiddetta sollecitazione equivalente $\bar{\sigma}$, come:

$$F(\sigma) = \bar{\sigma} - \sigma_0 \quad (148)$$

dove:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)^{1/2} = \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2} = \\ &= \left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_z)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (149)$$

Per applicazioni con deformazione piana si assume che non ci siano variazioni plastiche del volume, pertanto:

$$\sigma_0 = \sqrt{3}c_u \quad (150)$$

mentre in condizioni triassiali:

$$\sigma_0 = 2c_u \quad (151)$$

dove c_u rappresenta la coesione non drenata o la resistenza al taglio del terreno.

Se si rappresentano nello spazio tridimensionale le tensioni principali, la superficie di snervamento è rappresentata da un cilindro parallelo all'asse idrostatico $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ come mostrato nella Figura 40.

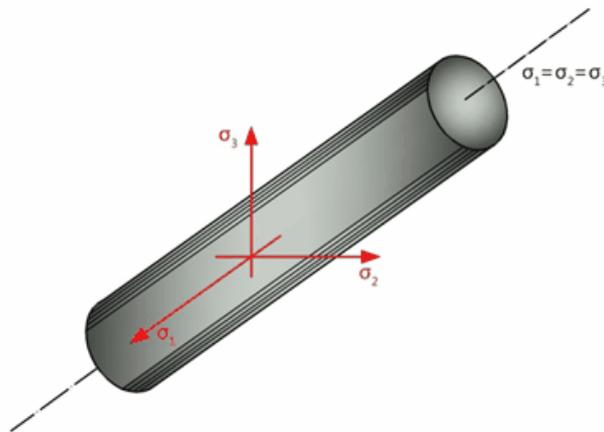


Fig.40. Criterio di Von Mises nello spazio delle tensioni principali

5.3.2 Il criterio di Mohr Coulomb e di Tresca

Nel piano principale delle tensioni, il criterio assume la forma di un cono irregolare a base esagonale.

Il criterio può essere scritto in funzione delle tensioni principali come:

$$F_{mc} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \sin \Phi - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - c \cos \Phi \quad (152)$$

Per cui le tensioni principali sono date da:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_m + \frac{2}{3} \bar{\sigma} \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \sigma_3 &= \sigma_m + \frac{2}{3} \bar{\sigma} \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (153)$$

dove le tensioni 'medie' e 'deviatoriche' sono definite dalle Equazioni 154:

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{\sqrt{3}} s \\ \bar{\sigma} &= \sqrt{\frac{3}{2}} t \end{aligned} \quad (154)$$

Gli invarianti s e t sono:

$$s = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (155)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2]} \quad (156)$$

Sostituendo σ_1 e σ_3 nell'Equazione (152) si ottiene:

$$F_{mc} = \sigma_m \sin \phi + \bar{\sigma} \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} - \frac{\sin \theta \sin \phi}{3} \right) - c \cos \phi \quad (157)$$

Il criterio di Tresca si ottiene dall'Equazione (157) ponendo \square u = 0, ottenendo quindi:

$$F_t = \frac{\bar{\sigma} \cos \theta}{\sqrt{3}} - c_u \quad (158)$$

5.4 Procedure elasto-plastiche

Quando un materiale ha un comportamento non-lineare, le proprietà del materiale dell'elemento si assumo essere quelle determinate nei suoi punti di campionamento. Tipicamente questi punti sono stazioni di quadratura per la legge di integrazione numerica. In ciascuno di questi punti si determinano le tensioni che vengono poi aggiornate durante il ciclo di calcolo.

Al fine di ridurre l'onere computazionale, il numero di punti deve essere piuttosto piccolo, mentre per riuscire a valutare in maniera più accurata la variazione della resistenza negli elementi individuali, è indispensabile utilizzare un numero maggiore di punti di campionamento.

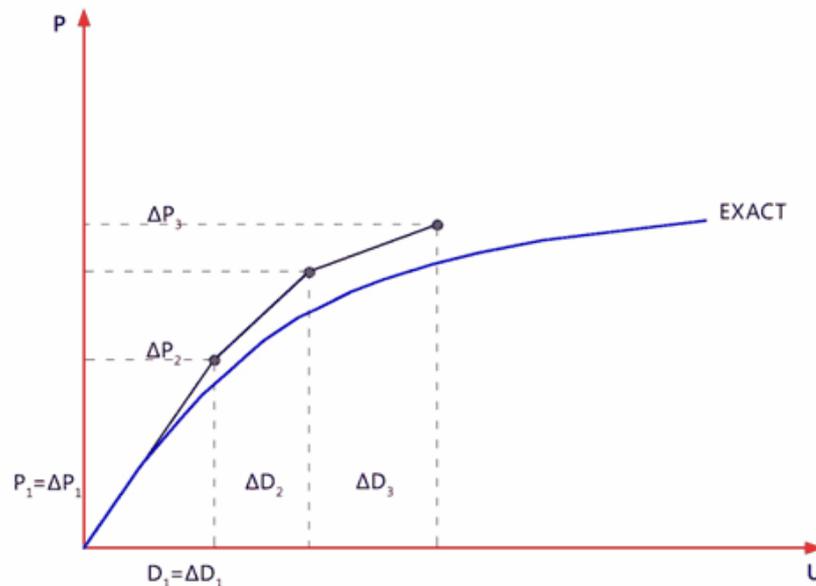


Fig. 41. Procedura di analisi non lineare.

L'implementazione delle relazioni costitutive elasto-plastiche, in un contesto ad elementi finiti, richiede la considerazione di due differenti livelli, il livello globale e il livello del materiale. A livello globale l'equilibrio deve essere soddisfatto così come in ogni altro calcolo lineare o non-lineare a elementi finiti, mentre a livello del materiale devono essere soddisfatte le relazioni di plasticità.

Eseguendo la discretizzazione degli elementi finiti, in definitiva, si ottiene l'Equazione 159:

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F} \quad (159)$$

dove \mathbf{F} rappresenta il vettore dei carichi applicati, \mathbf{U} rappresenta il vettore spostamento e \mathbf{K} la matrice delle rigidezze.

Poiché la relazione tensione-deformazione è non-lineare, la matrice costitutiva dipende dallo stato attuale delle tensioni della matrice delle rigidezze (non-lineare). Si possono pertanto adottare due tipologie di soluzioni per modellare la non-linearità del materiale. Con entrambi i metodi di risoluzione, il carico viene incrementato in diversi step e la soluzione si ottiene attraverso una serie di linearizzazioni.

5.4.1 Metodo delle rigidezze costanti

Il primo approccio si sviluppa con iterazioni a rigidezze costanti in cui la non-linearità è introdotta modificando iterativamente il vettore dei carichi. La matrice delle rigidezze globale, di solito elastica, in tale analisi viene formata una sola volta. Ciascuna iterazione, in questo modo, rappresenta un'analisi elastica. La convergenza si ottiene quando le tensioni generate dai carichi soddisfano la legge tensione-deformazione o il criterio di rottura ipotizzato, rispettando una prefissata tolleranza. Il vettore dei carichi, in ogni iterazione, è determinato dall'applicazione dei carichi esterni e dai carichi auto-equilibranti. I carichi di volume hanno l'effetto di ridistribuire le tensioni (o i momenti) nel sistema, senza alterare il carico netto. Il metodo è mostrato nella Figura 42. Per problemi con carico-controllato, quanto più ci si avvicina alla rottura, maggiore sarà il numero di iterazioni richieste, perché la matrice delle rigidezze globale elastica inizia a sovrastimare la rigidezza reale del materiale.

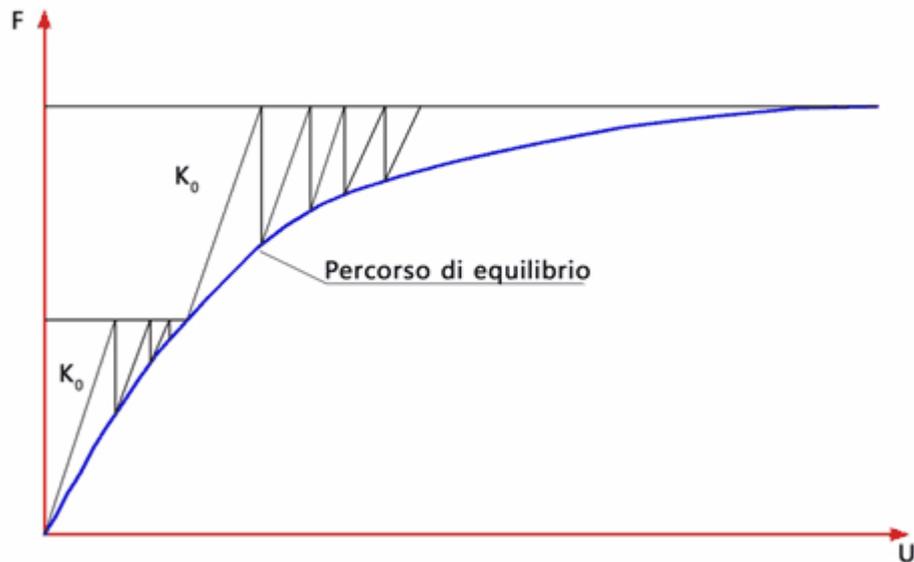


Fig. 42. Metodo a rigidezze costanti

Gli effetti delle azioni plastiche possono essere considerati come le tensioni iniziali che produrrebbe un carico fittizio combinate con quelle del carico realmente applicato. Questa procedura evita che le fasi onerose di calcolo, come la formazione e la fattorizzazione della matrice delle rigidezze tangente, siano effettuate ripetutamente, ma la convergenza si presenta tanto più lenta quanto maggiori saranno le deformazioni plastiche.

5.4.1.1 Generazione di carichi auto-equilibrati

Il metodo a rigidezze costanti appena descritto utilizza soluzioni elastiche per ottenere la convergenza in maniera iterativa, variando i carichi del sistema. Con ciascun incremento di carico, il sistema di equazioni $KU_i = F_i$ deve essere risolto per gli incrementi degli spostamenti globali, dove K è la matrice delle rigidezze globale ed F_i il vettore dei carichi (di volume) globali interni ed esterni.

I singoli incrementi di spostamento u_i estratti da U_i sono dati dalla relazione:

$$\Delta \varepsilon_i = \mathbf{B} u_i \quad (160)$$

Durante ogni ciclo di calcolo, assumendo il materiale prossimo allo snervamento, le deformazioni contengono componenti sia elastiche sia plastiche, cosicché:

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^e + \Delta \varepsilon^p \quad (161)$$

Solo gli incrementi di deformazione elastica $\Delta\varepsilon$ generano delle tensioni, come mostra l'Equazione 162 seguente:

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon \quad (162)$$

Questi incrementi delle tensioni si aggiungono alle tensioni provenienti dalla fase precedente di carico: le tensioni vengono così aggiornate e sostituite nel criterio di rottura.

Se è necessaria la ri-distribuzione delle tensioni, vuol dire che il criterio di resistenza non risulta soddisfatto ($F > 0$). La ri-distribuzione si effettua modificando il vettore F_i degli incrementi di carico nel sistema di equazioni globale, corrispondente al ciclo di carico i . Il vettore F è composto da due tipi di carichi (Equazione 163):

$$F = F_a + F_b^i \quad (163)$$

F_a che rappresenta l'incremento di carico esterno attualmente applicato ed F_b^i il vettore dei carichi di volume che varia da un'iterazione all'altra e che deve essere auto-equilibrato cosicché il carico netto sul sistema non sia influenzato da esso.

5.4.1.2 Metodo delle deformazioni iniziali

In questo metodo il materiale è capace di sostenere tensioni al di fuori del criterio di rottura per un "periodo finito", per cui anziché alle deformazioni plastiche, ci si riferisce alle deformazioni visco-plastiche, il cui valore è legato alla quantità con cui il criterio di resistenza viene violato. Le deformazioni visco-plastiche sono date da:

$$\varepsilon^{vp} = F \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (164)$$

dove F è la funzione di snervamento e Q è la funzione potenziale plastico.

L'incremento della deformazione visco-plastica, che si accumula iterazione dopo iterazione, si ottiene moltiplicando il tasso di deformazione per un passo temporale fittizio come mostrano le Equazioni 165 e 166:

$$\delta \varepsilon^{vp,i} = \Delta t \dot{\varepsilon}^{vp,i} \quad (165)$$

e

$$\Delta \varepsilon^{vp,i} = \Delta \varepsilon^{vp,i-1} + \delta \varepsilon^{vp,i} \quad (166)$$

in cui il passo temporale, per la stabilità numerica, dipende dal criterio di rottura, che si assume come mostrato di seguito:

$$\Delta t = \frac{4(1+\nu)}{3E} \quad (\text{criterio di Von Mises}) \quad (167)$$

$$\Delta t = \frac{4(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-2\nu+\sin^2\phi)} \quad (\text{criterio di Mohr-Coulomb}) \quad (168)$$

Le derivate della funzione potenziale plastico Q, rispetto alle tensioni, si può esprimere come:

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma} + \frac{\partial Q}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial Q}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \quad (169)$$

dove $J_2 = \frac{t^2}{2}$.

Il parametro t rappresenta il secondo invariante deviatorico delle tensioni (Equazione 170):

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2]} \quad (170)$$

e

$$J_3 = s_x s_y s_z - s_x \tau_{yz}^2 - s_y \tau_{zx}^2 - s_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} \quad (171)$$

$$s_x = \frac{(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)}{3}, \text{ etc.} \quad (172)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{\sqrt{3}} s \quad (173)$$

Il primo invariante s è dato dalla relazione:

$$s = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (174)$$

Questo si può notare soprattutto nelle applicazioni di tipo geotecnico: si applicano le condizioni di deformazione piana e nelle equazioni di cui sopra si sostituisce la condizione $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$.

La componente della deformazione visco-plastica si può calcolare numericamente con l'Equazione 175:

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = F \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma_m} \mathbf{M}^1 + \frac{\partial Q}{\partial J_2} \mathbf{M}^2 + \frac{\partial Q}{\partial J_3} \mathbf{M}^3 \right) \boldsymbol{\sigma} \quad (175)$$

dove

$$\mathbf{M}^1 = \frac{1}{3(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & sym. & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (176)$$

$$\mathbf{M}^2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & sym. & 6 & 0 & 0 \\ & & & & 6 & 0 \\ & & & & & 6 \end{bmatrix} \quad (177)$$

$$\mathbf{M}^3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} s_x & s_y & s_z & \tau_{xy} & -2\tau_{yz} & \tau_{zx} \\ & s_y & s_x & \tau_{xy} & \tau_{yz} & -2\tau_{zx} \\ & & s_z & -2\tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{zx} \\ sym. & & & -3s_z & 3\tau_{zx} & 3\tau_{yz} \\ & & & & -3s_x & 3\tau_{xy} \\ & & & & & -3s_y \end{bmatrix} \quad (178)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T \quad (179)$$

I carichi di volume auto-equilibrati si accumulano, in ogni passo temporale e per ogni step di carico, sommando i seguenti integrali valutati in tutti i punti di Gauss che non soddisfano il criterio di rottura ($F > 0$ ai punti di Gauss).

$$\mathbf{F}_b^i = \mathbf{F}_b^{i-1} + \sum_{elements} \iint \mathbf{B}^T \mathbf{E} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{vp,i} dx dy \quad (180)$$

Questo processo si ripete per ogni passo temporale finché nessun punto di integrazione sollecitato viola il criterio di rottura rispettando una data tolleranza.

La convergenza del criterio è basata su una misura adimensionale con cui varia il valore del vettore incremento dello spostamento U_i iterazione dopo iterazione.

5.4.1.3 Metodo delle tensioni iniziali

Questo metodo implica l'esistenza di una relazione esplicita fra gli incrementi tensioni-deformazioni.

Così, il legame elasto-plastico è descritto da:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{ep}) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (181)$$

dove \mathbf{E}^{ep} rappresenta la matrice costitutiva tangente generalizzata.

Per la plasticità perfetta, in assenza di incrudimento o contrazione del materiale, la matrice costitutiva tangente può essere ottenuta a partire dall'Equazione 145:

$$\mathbf{E}^{ep} = \frac{\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{E}}{\frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (182)$$

I carichi di volume \mathbf{F}_b^i , nel processo di redistribuzione delle tensioni, sono formati, in ciascuna iterazione, dalla somma dei seguenti integrali valutata, per ogni elemento, nei punti di integrazione di Gauss.

$$\mathbf{F}_b^i = \sum_{\text{elements}} \iint \mathbf{B}^T \mathbf{E}^{ep} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^i dx dy \quad (183)$$

Questo metodo è utilizzato in unione con l'integrazione in avanti di Eulero delle equazioni elasto-plastiche, estrapolando i valori a partire dal punto in cui la superficie di snervamento è attraversata.

5.4.1.4 Procedura risolutiva

Siano \mathbf{F}_a i carichi applicati alla struttura con incrementi di carico $\Delta \mathbf{F}_{a1}$, $\Delta \mathbf{F}_{a2}$ e così via, cosicché $\mathbf{F}_a = \sum \Delta \mathbf{F}_{a_i}$. L'interpretazione grafica del metodo per un problema con una sola variabile spostamento è mostrata nella Figura (45 b):

1. Per il primo ciclo di calcolo ($i=1$) si assume $E_{ep}=E$ per tutti gli elementi. Si applica, dunque, il primo incremento di carico $\Delta \mathbf{F}_{a1}$.
2. Utilizzando la tensione corrente, si determina il valore di E_{ep} oppure l'incremento della deformazione visco-plastica in ciascun elemento. Si ottengono i carichi di volume auto-equilibrati per ogni elemento e la struttura globale \mathbf{F}_b^i . Si prosegue risolvendo il sistema di equazioni $\mathbf{K} \Delta \mathbf{U}_i = \mathbf{F}^i$, con $\mathbf{F} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b^i$, dove \mathbf{F}_a è l'incremento di carico esterno effettivo applicato. Dal valore di $\Delta \mathbf{U}_i$ si ottiene l'incremento corrente della deformazione $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i$ per ogni elemento.

3. Se qualche elemento passa dallo stato elastico a quello plastico si corregge il valore di E_p e si torna allo step precedente (passo 2) ripetendo gli step 2 e 3 fino alla convergenza.
4. Si aggiornano il vettore spostamento $\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_{i-1} + \Delta\mathbf{U}_i$, le deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_{i-1} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_i$ e le tensioni $\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}_{i-1} + \Delta\boldsymbol{\sigma}_i$.
5. Si applica il prossimo incremento di carico e si ritorna allo step 2.
6. La procedura termina quando la somma degli incrementi di carico uguaglia il carico totale o si verifica il collasso della struttura.

Durante il processo di iterazione, gli spostamenti nodali, causati dall'applicazione degli incrementi di carico esterni effettivi e dai carichi di volume, sono confrontati nelle iterazioni successive.

Il criterio di convergenza è basato su una misura adimensionale del valore per cui l'incremento del vettore spostamento cambia da un'iterazione all'altra. Si dice che la convergenza sia verificata se la variazione in valore assoluto fra il valore corrente delle componenti del vettore spostamento e il valore massimo sia minore di un prefinito valore di tolleranza.

5.4.2 Metodo delle rigidità tangenti

Il secondo approccio, mostrato nella Figura 43, prende in considerazione la riduzione della rigidità del materiale.

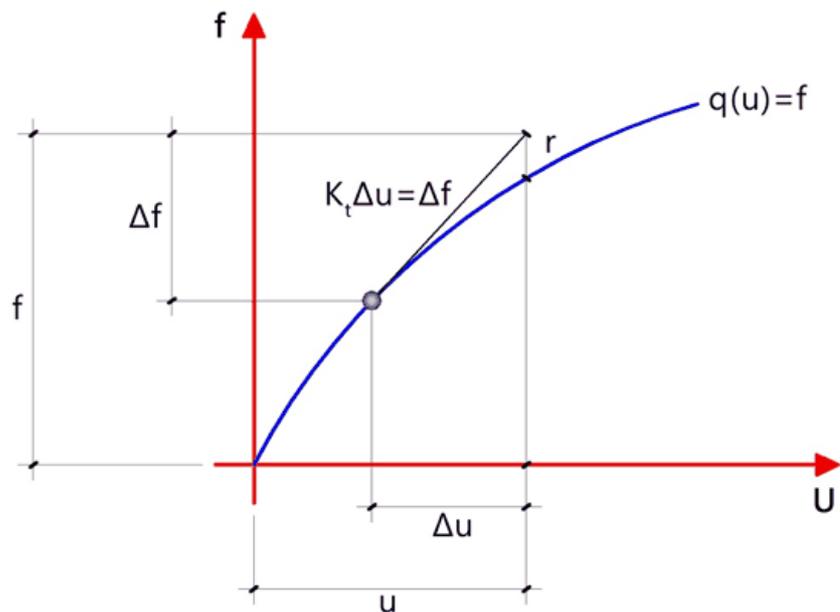


Fig. 43. Step di carico nel metodo a rigidezza tangente.

Se si considerano step di carico abbastanza piccoli, il metodo diventa equivalente al metodo esplicito di Eulero. Secondo questo approccio la matrice delle rigidzze globale deve essere aggiornata periodicamente e le iterazioni per raggiungere la convergenza si effettuano utilizzando i carichi di volume residuali.

Contrariamente a quanto avviene con l'approccio a rigidezza costante, l'onere aggiuntivo di ri-formare e ri-fattorizzare la matrice delle rigidzze globale nel metodo di rigidezza variabile, è compensato dalla riduzione del numero di iterazioni necessarie che diminuisce quanto più si è vicini alla rottura.

L'algoritmo richiede che la rappresentazione della relazione tra tensioni-deformazioni debba essere memorizzata, cosicché le tensioni e le costanti elastiche possano essere ricavate per ogni deformazione. Si devono inoltre memorizzare ed aggiornare, per ogni punto di campionamento di ciascun elemento e dopo ogni ciclo di calcolo, le deformazioni, le tensioni e gli spostamenti nodali.

E' pertanto necessaria una relazione incrementale tra spostamenti e forze:

$$\mathbf{K}_t \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{F} \quad (184)$$

dove K_t è la matrice delle rigidzze tangente e l'equazione sopra riportata rappresenta la forma linearizzata dell'equazione non lineare (Equazione 185):

$$\mathbf{K}_t = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}^{pl} \mathbf{B} dV \quad (185)$$

Il calcolo procede con l'applicazione di un incremento di carico ΔF e con il calcolo del corrispondente incremento dello spostamento con l'Equazione 184 (Figura 43). L'incremento della deformazione è valutata nel solito modo, cioè:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \Delta u \quad (186)$$

Successivamente le tensioni vengono calcolate con la relazione costitutiva elasto-plastica:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{ep}) \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E}^{pl} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (187)$$

Questa rappresenta una relazione non lineare fintanto che la matrice \mathbf{E}^{ep} dipende dallo stato tensionale corrente e la procedura iterativa generale può così essere utilizzata. Sulla base, quindi, del calcolo delle tensioni, il vettore delle forze interne \mathbf{Q} può essere valutato risolvendo l'integrale seguente:

$$\mathbf{Q} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (188)$$

che deve essere bilanciato dal carico totale applicato \mathbf{F} , pertanto, la forza residua svanisce:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} - \mathbf{F} \quad (189)$$

Se il valore della forza residua è diverso dalla tolleranza prefissata, vuol dire che è applicata come un carico esterno seguendo la procedura di Newton-Raphson. Questa forza residua offre un nuovo incremento della deformazione e un corrispondente nuovo incremento della tensione, che deve essere determinato tramite la relazione costitutiva elasto-plastica non lineare, calcolando successivamente un nuovo valore residuale e così via finché il valore residuo non diventi sufficientemente piccolo.

La procedura può essere schematizzata come segue:

1. Si applica l'incremento di carico ΔF e si trovano i valori degli incrementi dello spostamento e della deformazione, rispettivamente Δu e $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$.
2. Si determina l'incremento di tensione $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ dall'equazione (187).
3. Si calcola il valore residuo \mathbf{R} .

4. Se $||R|| < tol$ si ricava kt e si ritorna allo step 1.

Così, il calcolo di uno step di carico richiede una procedura iterativa globale dove le forze non bilanciate, anche dette residuali, devono svanire, così come prevede la procedura al fine di calcolare gli incrementi delle tensioni (step 2). L'aggiornamento delle tensioni si effettua in ogni punto di integrazione. Per calcolare l'incremento delle tensioni causato dall'incremento delle deformazioni, nel codice è, quindi, implementato lo schema di integrazione all'indietro.

Essenzialmente il metodo consiste nell'applicazione di predittore elastico seguito da un correttore plastico, al fine di garantire che la tensione finale sia quasi sulla superficie di rottura.

5.4.2.1 Integrazione delle relazioni costitutive. Matrice tangente costante

Riferendoci alla Figura 44, se in un punto A, che giace all'interno o sulla superficie di rottura, è applicato un predittore elastico, questo produce uno stato tensionale al di fuori della superficie e, pertanto, gli incrementi terminano nel punto B. Per soddisfare la condizione di rottura è applicato un correttore plastico, che restituisce le tensioni sulla superficie di rottura, in particolare nel punto C. Il correttore plastico è determinato da due quantità, il valore scalare $\Delta\lambda$, che rappresenta il valore della magnitudine,

e il gradiente di carico $\left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right)_C$ che fornisce la direzione. Lo scalare $\Delta\lambda$ è determinato se la condizione di rottura è soddisfatta:

$$F(\sigma_C - \Delta\sigma^p) = 0 \quad (190)$$

dove $\Delta\sigma^p$ è dato da:

$$\Delta\sigma^p = \Delta\lambda \mathbf{E} \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right)_C \quad (191)$$

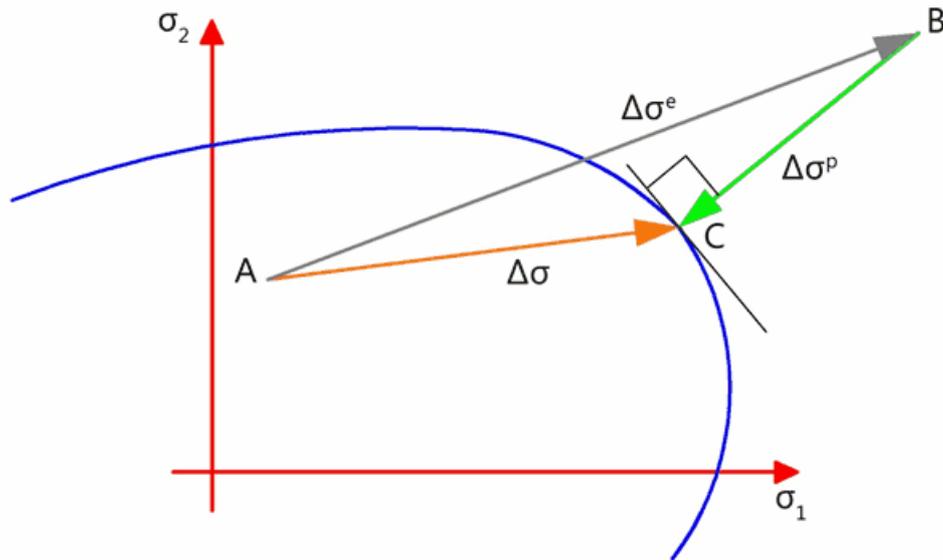


Fig. 44. Correzione della tensione.

Se si espande in serie di Taylor la funzione di snervamento valutata nel punto B, l'elemento di primo ordine assume la seguente forma:

$$F(\boldsymbol{\sigma}_C) = F(\boldsymbol{\sigma}_B - \Delta\boldsymbol{\sigma}^p) \approx F(\boldsymbol{\sigma}_B) - \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_B^T \Delta\boldsymbol{\sigma}^p \quad (192)$$

Se si inserisce l'espressione fornita per $\Delta\boldsymbol{\sigma}^p$ nell'espressione sopra riportata e ricordando che la funzione di snervamento è costante nel punto C, si ottiene un passo:

$$\Delta\lambda = \frac{F(\boldsymbol{\sigma}_B)}{\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_B^T \mathbf{E} \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_C} \quad (193)$$

con lo schema di integrazione all'indietro di Eulero, è possibile formare una matrice modulare tangente costante:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \Delta\boldsymbol{\sigma}_B - \Delta\lambda \mathbf{E} \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_C = (\boldsymbol{\sigma}_A + \mathbf{E}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}) - \Delta\lambda \mathbf{E} \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_C \quad (194)$$

differenziando si ottiene:

$$d(\Delta\sigma) = \mathbf{E}_c^{ep} d(\Delta\varepsilon) \quad (195)$$

dove E_{ep} è nota come "matrice tangente costante" ed è data da:

$$\mathbf{E}_c^{ep} = \mathbf{E}_c - \frac{\mathbf{E}_c \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{E}_c}{\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{E}_c \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \sigma}} \quad (196)$$

e inoltre:

$$\mathbf{E}_c^{-1} = \mathbf{E}^{-1} + \Delta\lambda \nabla^2 Q(\sigma) \quad (197)$$

5.4.2.2 Procedura risolutiva

Siano F i carichi applicati sulla struttura con incrementi ΔF_1 ΔF_2 e così

via, in modo tale che $\mathbf{F} = \sum \Delta \mathbf{F}_i$. L'interpretazione grafica del metodo per un problema con una sola variabile spostamento è mostrata nella Figura 45, dove i pedici i indicano il numero di step effettuati.

La procedura si può sintetizzare nei seguenti passi:

1. Per il primo ciclo di calcolo ($i=1$) si assume $E_{ep}=E$ per tutti gli elementi. Si applica, dunque, il primo incremento di carico ΔF .
2. Utilizzando le deformazioni correnti, si determina il valore di E_{ep} in ciascun elemento, ottenendo il valore di $k_{t,i}$ per ognuno di essi. Quindi, si determinano i valori delle forze residue, si ottiene la matrice $k_{t,i}$ globale di rigidità tangente e si risolve il sistema $\mathbf{K}_{t,i} \Delta \mathbf{U}_i = \Delta \mathbf{R}_i$. Tramite il valore di ΔU_i si ottiene l'incremento corrente della deformazione $\Delta \varepsilon_i$ per ciascun elemento.
3. Se qualche elemento effettua il passaggio dallo stato elastico a quello plastico si corregge il valore di E_{ep} e si

ritorna allo step 2 ripetendo gli step 2 e 3 fino alla convergenza.

4. Si aggiorna il vettore spostamento $\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_{i-1} + \Delta\mathbf{U}_i$,
 le deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_{i-1} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_i$ e le tensioni $\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}_{i-1} + \Delta\boldsymbol{\sigma}_i$.
5. Si applica l'incremento di carico successivo e si ritorna allo step 2.
6. La procedura si arresta quando la somma degli incrementi di carico uguaglia il carico totale oppure quando la struttura collassa.

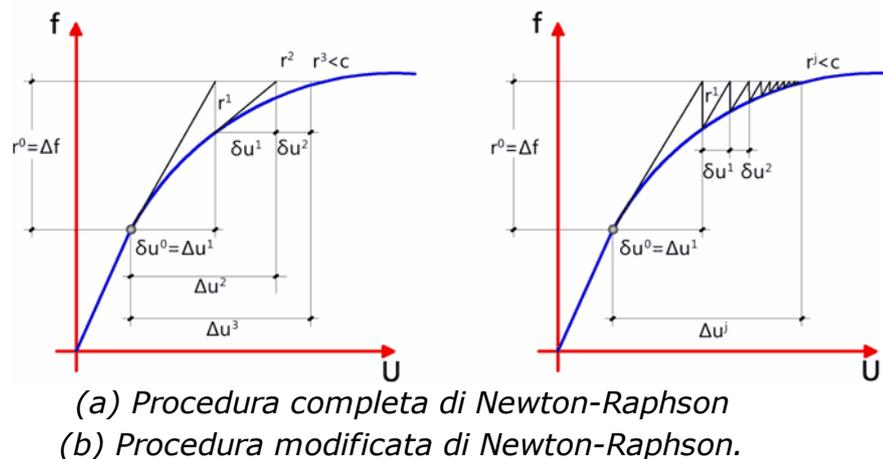


Fig. 45. Procedura di risoluzione

Solitamente si utilizza il cosiddetto metodo di Newton-Raphson modificato.

La modifica consiste nel valutare la rigidità tangente solamente una volta all'inizio di ogni step di carico anziché in ogni iterazione, come mostra la Figura 45 (b). Pertanto, durante lo step 2 dell'algoritmo mostrato in precedenza, la matrice delle rigidità tangente è assemblata e fattorizzata solamente una volta e cioè all'inizio degli incrementi di carico. Durante il processo d'iterazione si valutano le forze residue.

Si dice che la convergenza sia verificata se il valore assoluto della variazione di tutte le componenti del vettore delle forze residue tra il

valore corrente ed il valore massimo risulta minore di un predefinito valore di tolleranza.

6 Analisi dello stato stazionario

L'equazione differenziale parziale che governa il fenomeno stazionario per un acquifero confinato nel piano orizzontale (x,y) è:

$$k_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + Q = 0 \quad (198)$$

dove ϕ è il potenziale del fluido o prevalenza totale misurata dal fondo dell'acquifero, k_x e k_y sono i coefficienti di permeabilità nella direzione x e y , e Q è il valore della portata di ricarica. Il pompaggio fornisce un valore negativo di Q .

Il carico totale ϕ del fluido in un punto è dato dalla seguente espressione:

$$\phi = y + \frac{p}{\gamma} \quad (198.1)$$

Dove y è la quota del punto considerato, p è la pressione del fluido e γ il peso di volume del fluido considerato.

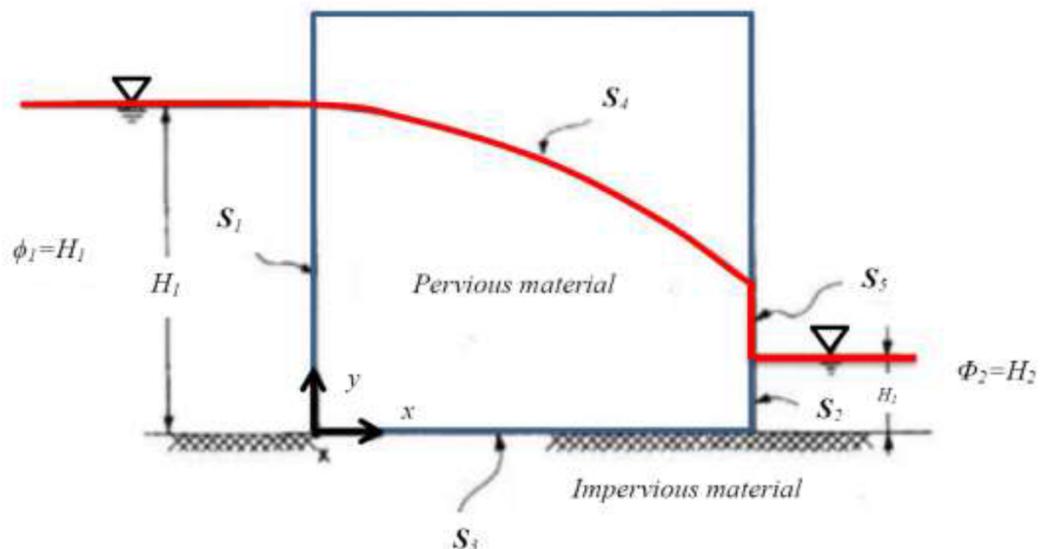


Figura (a)-Flusso non confinato, analisi stato stazionario. Condizioni al contorno.

In un problema di flusso stazionario come rappresentato in figura (a) l'esatta posizione e localizzazione dei contorni S_4 e S_5 non sono note,

anche se si conoscono le condizioni al contorno. La superficie S_4 è caratterizzata da pressione nei pori nulla lungo la superficie e prevalenza totale uguale alla quota y .

Le condizioni al contorno sono:

- per le superfici a monte e a valle:

$$\phi = \phi_1 \text{ su } S_1$$

$$\phi = \phi_2 \text{ su } S_2$$

- per la superficie di base impermeabile S_3 :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

dove n è la normale alla superficie;

- per la superficie libera S_4

$$\begin{cases} \phi = y \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

- per la superficie libera S_4

$$\phi = y \text{ su } S_4$$

Il processo di discretizzazione ad elementi finiti riduce l'equazione differenziale (198) in un insieme di equazioni di equilibrio nella forma:

$$\mathbf{k}_c \Phi = \mathbf{q} \quad (199)$$

dove \mathbf{k}_c è la matrice simmetrica di permeabilità, Φ è il vettore nodale del potenziale (carico totale), e \mathbf{q} è un vettore nodale afflussi/deflussi.

Gli elementi della matrice sono calcolati utilizzando l'Equazione 200:

$$\mathbf{k}_c = \iint \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} dx dy \quad (200)$$

assumendo che gli assi principali del tensore di permeabilità coincidano con gli assi x ed y .

La matrice \mathbf{K} è data da:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \quad (201)$$

mentre la matrice T , data dall'Equazione 202, è la matrice di interpolazione del gradiente potenziale totale dell'elemento: assume lo stesso significato della matrice B deformazione-spostamento.

Ad esempio per un elemento quadrilatero a 4 nodi, la matrice T è data da:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (202)$$

Per imporre le prevalenze totali assegnate sui bordi si aggiungono coefficienti di permeabilità elevati agli elementi diagonali di K_c corrispondenti ai nodi al contorno, e si specificano le condizioni di flusso che risultano dai potenziali totali dati. Quindi l'equazione (199) viene modificata per ottenere:

$$(\mathbf{k}_c + \mathbf{k}^b)\Phi = \mathbf{Q}^b \quad (199.1)$$

dove \mathbf{k}^b è una matrice diagonale, l'elemento i -esimo della diagonale è uguale a zero se il carico ϕ_i non è assegnato, altrimenti è uguale a k , dove $k \gg k_{ij}$ (di solito si assegna un grande valore di penalità in GFAS nel pannello *Analisi flusso in regime stazionario*). Conseguentemente, l' i -esimo elemento del vettore \mathbf{Q} è uguale a zero se ϕ_i non è specificato, altrimenti è uguale a $k\phi_i$.

La soluzione al problema delle infiltrazioni potrebbe essere ottenuta subito se fosse nota la superficie libera S_4 . Verrebbe effettuata la discretizzazione ad elementi finiti del dominio entro i confini S_i ($i=1\dots 5$), e i potenziali totali incogniti nei punti nodali potrebbero essere risolti utilizzando l'equazione (199.1). Tuttavia, con la posizione S_4 sconosciuta, è pratica comune assumere una superficie libera, risolvere l'equazione (199.1) con non tutte le condizioni al contorno imposte, controllare se tutte le condizioni al contorno sono soddisfatte e iterare con la superficie libera S_4 fino a quando non è stata trovata una soluzione che soddisfa tutte le condizioni al contorno. Il requisito di base nella soluzione di iterazione della mesh ad elementi finiti di cui sopra è che non ci deve essere flusso al di sopra della linea $\phi=y$. Per la risoluzione del problema viene eseguita una discretizzazione ad elementi finiti in cui la permeabilità è considerata:

a) k , per $\phi \geq y$

b) 0, per $\phi < y$

La permeabilità del materiale di cui sopra corrisponde ad una permeabilità non lineare che viene trattata in due modi differenti: 1) *Nonlinear air element* e 2) *True air elements*.

Nel caso 1) la permeabilità è impostata ad un valore molto basso per gli elementi che si trovano sopra la superficie freatica e per tutti i nodi dell'elemento.

Nel caso 2) la permeabilità è imposta a zero per gli elementi che si trovano sopra la superficie freatica e per tutti i nodi dell'elemento.

6.1 Metodo di analisi in GFAS

La procedura implementata in GFAS per la soluzione dei problemi di infiltrazioni a superficie libera è riassunta come segue:

1. Generazione della mesh per l'intero dominio sottoposto all'analisi delle infiltrazioni (**il modello geometrico va generato considerando le coordinate dei punti all'interno del quadrante positivo del sistema di riferimento XY**).

2. Determinazione del profilo della matrice di rigidezza per l'intera mesh, ovvero, si suppone che il "*True air element*" (procedura 2) o "*Nonlinear air element*" (procedura 1) sia presente nella mesh per tutte le fasi dell'analisi.

3. Valutazione della matrice di rigidezza del sistema, introduzione delle condizioni al contorno prescritte e risoluzione l'Eq. (199.1) per il carico totale nodale.

4. Se un elemento verificato si trova totalmente al di sopra della superficie libera, considerando tutti i suoi nodi, verrà contrassegnato come "*True air element*" o "*Nonlinear air element*" e verrà trascurato in tutti i calcoli successivi. Qualsiasi elemento che è al di sotto, o parzialmente al di sotto, della superficie libera durante l'iterazione non sarà cancellato dall'analisi.

5. Determinazione della nuova matrice di rigidezza del sistema con il profilo dello skyline originale come determinato nel passaggio 2. I "*True air element*" non entreranno in alcun calcolo. Verranno considerati gli "*Nonlinear air element*" ma con un basso valore di permeabilità.

6. Riesecuzione dei passaggi da 5 a 6 fino a quando non vengono più generati "nodi aerei" o "elementi non lineari" dall'iterazione.

7. Se esiste una superficie libera esterna che è data da S_5 in Fig. (a), la posizione sconosciuta della superficie libera può essere trovata trasformando gradualmente i nodi esterni in nodi con carico assegnato dal livello più basso al più l'alto e ripetendo i passaggi da 5 a 7 .

8. La convergenza si ottiene se non vi è alcun elemento aria generato durante l'iterazione e tutti i nodi della superficie libera esterna soddisfano le condizioni al contorno.

9. La posizione precisa della superficie libera e delle linee equipotenziali può essere determinata mediante un processo di interpolazione.

6.2 Esempio di calcolo

Consideriamo una argine in terra di forma trapezia di materiale relativamente impermeabile rappresentato in figura (b):

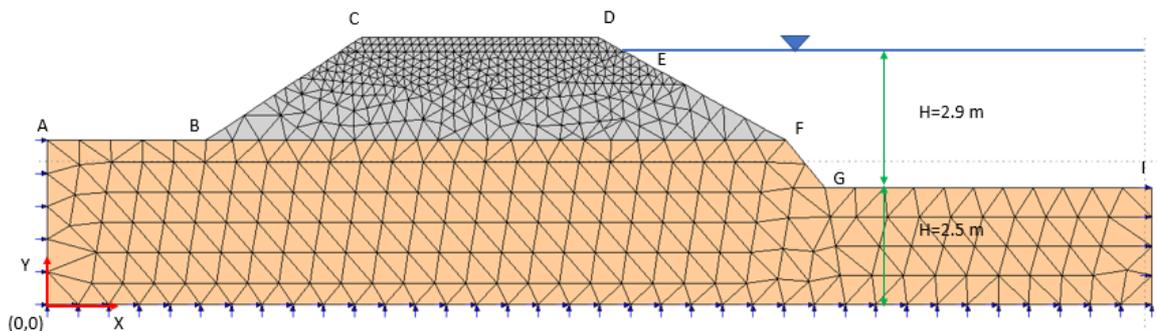


Figura (b) - modello geometrico

Ai fini della progettazione è richiesto che la linea freatica rimanga all'interno del corpo arginale e che non si abbia un battente idraulico a valle sul tratto AB. Il livello di acqua a monte è fissato a 2,9 m pertanto il carico totale ϕ sui nodi posti nei tratti EFGI e sui bordi è pari alla somma della quota e del livello di acqua per un totale di 5,4 m (Figura c).

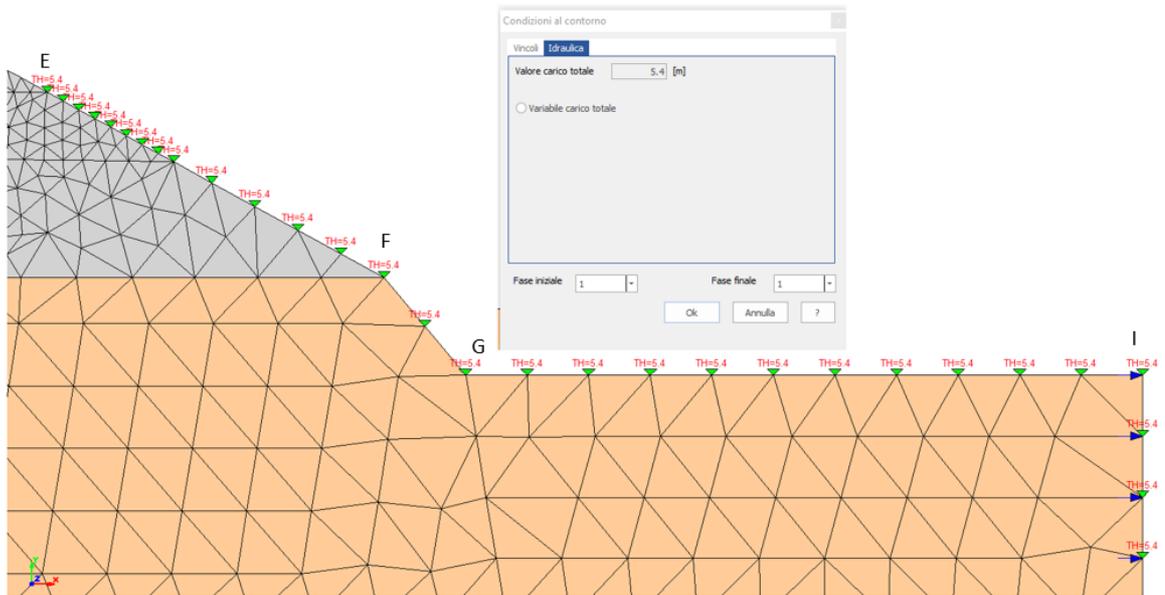


Figura (c) - carico idraulico a monte

Il resto dei nodi a valle e in sommità hanno un carico che è pari solo alla loro quota in quanto per essi non vogliamo un carico idraulico (Figura d). Per questi nodi viene assegnato un carico idraulico variabile che il software definisce in automatico in fase alle quote del modello geometrico. Con questa assegnazione ammettiamo la possibilità che si possa formare una superficie freatica a valle, dato che non conosciamo l'esatta posizione della linea di saturazione.

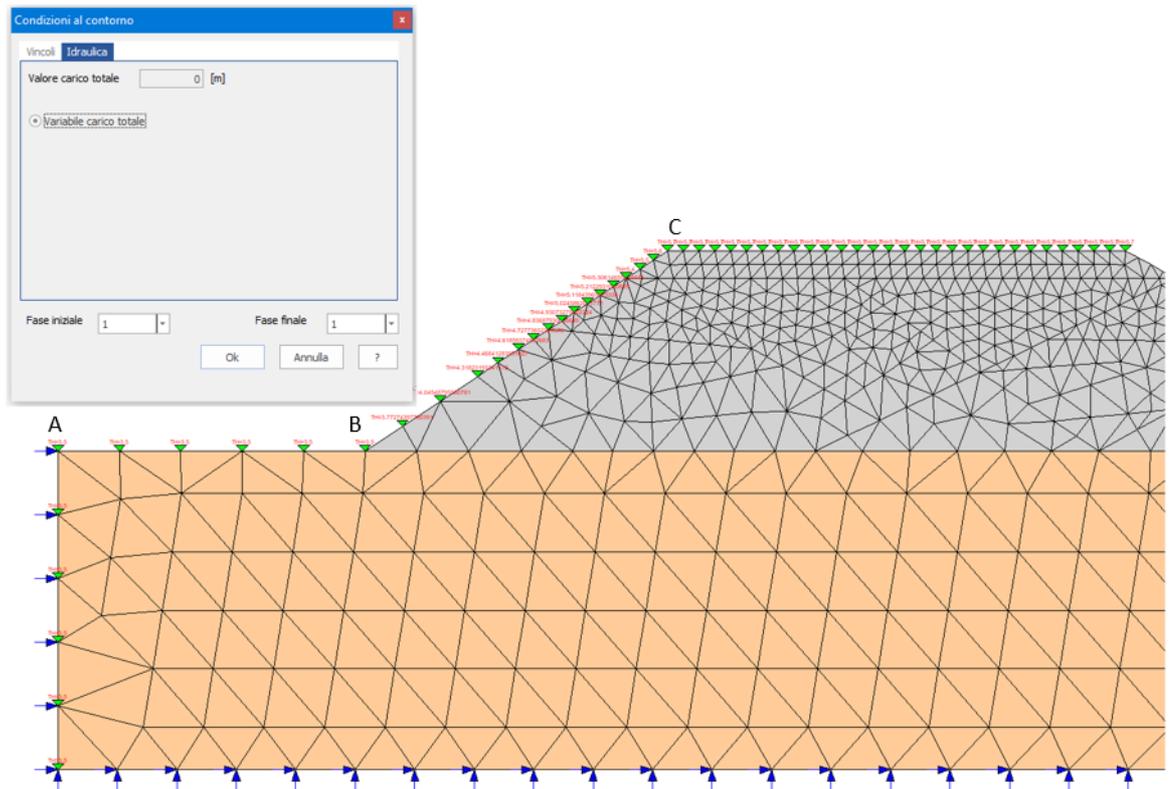


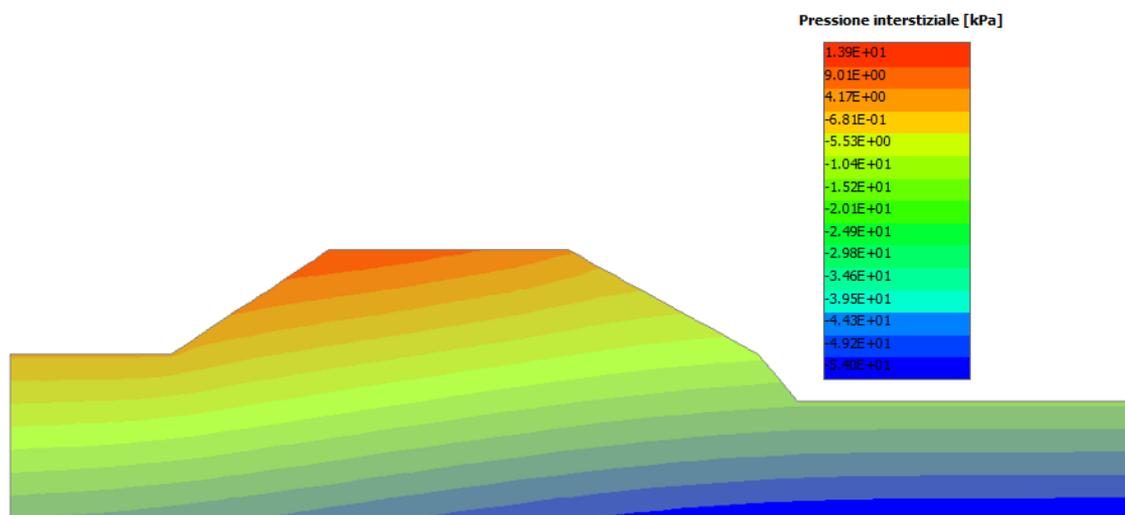
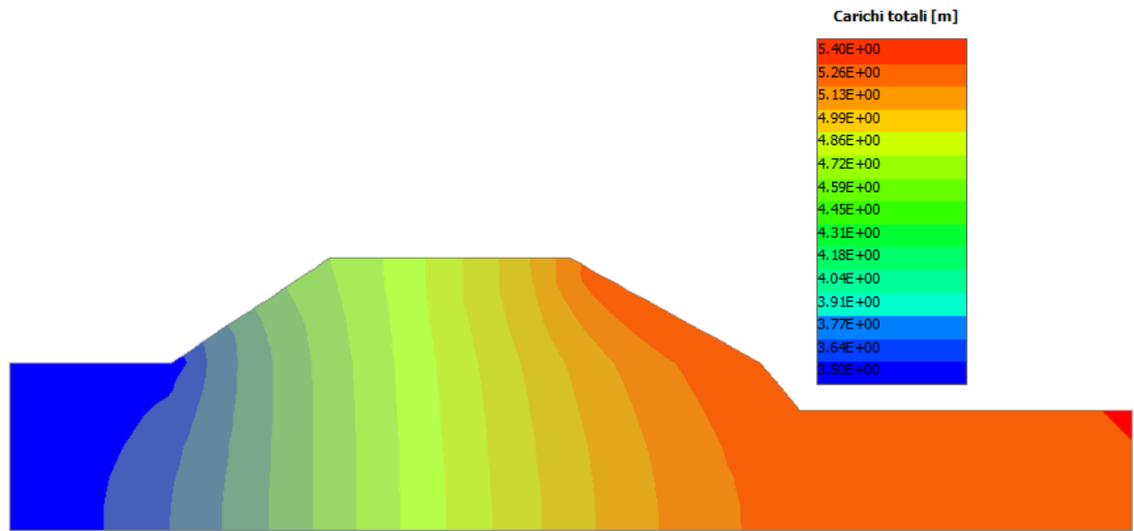
Figura (d) - carico idraulico a valle e in sommità

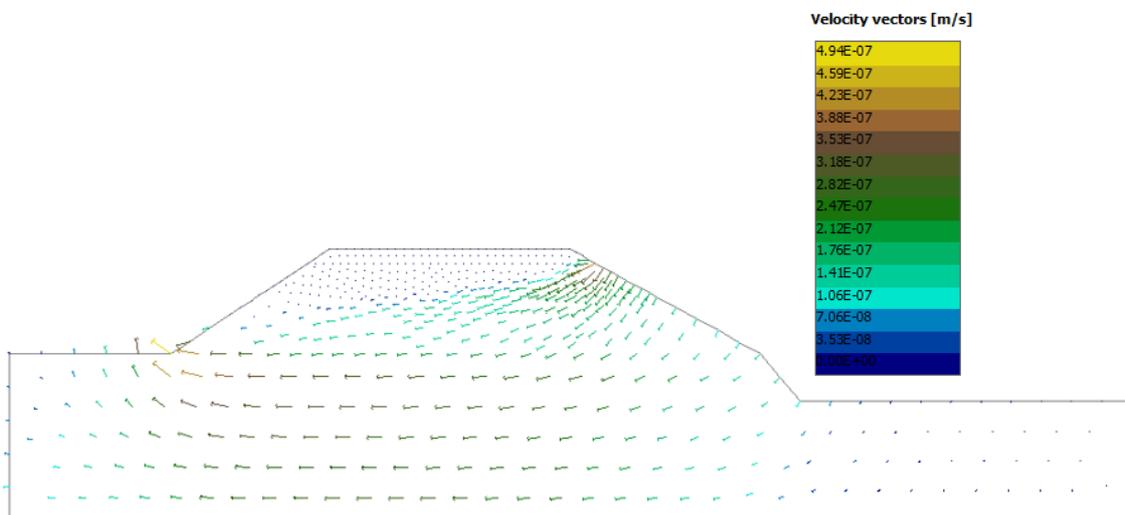
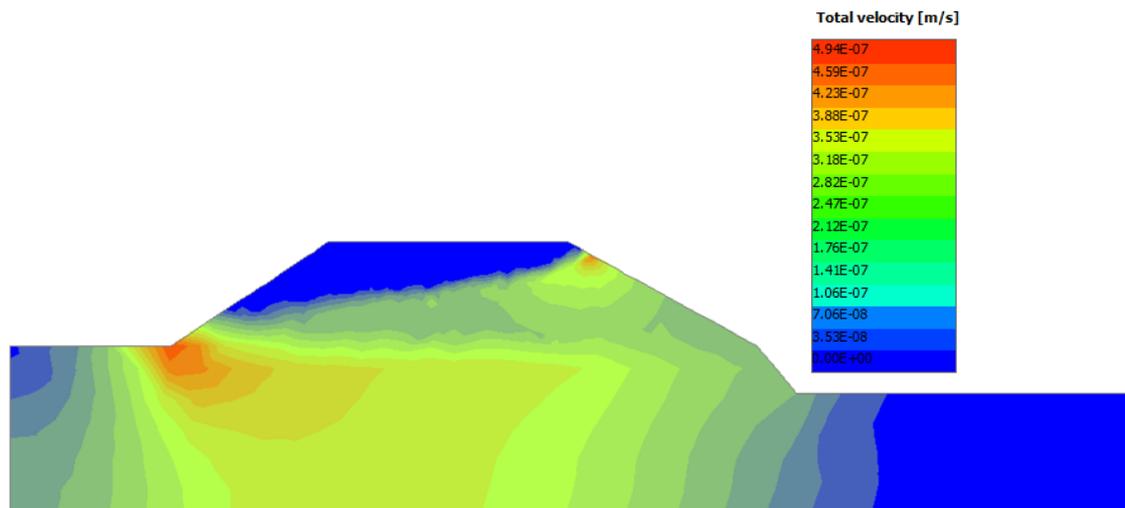
I parametri idraulici di ogni materiale vanno assegnati in Caratteristiche materiale - Proprietà idrauliche.

L'analisi viene avviata dal pannello ANALISI, scegliendo il comando *Analisi con falda* e *Analisi filtrazione*. Nella finestra verrà richiesto di scegliere l'opzione "True air element" (procedura 2) o "Nonlinear air element" (procedura 1).

I risultati di calcolo sono visualizzati nel pannello RISULTATI - Plot risultati.

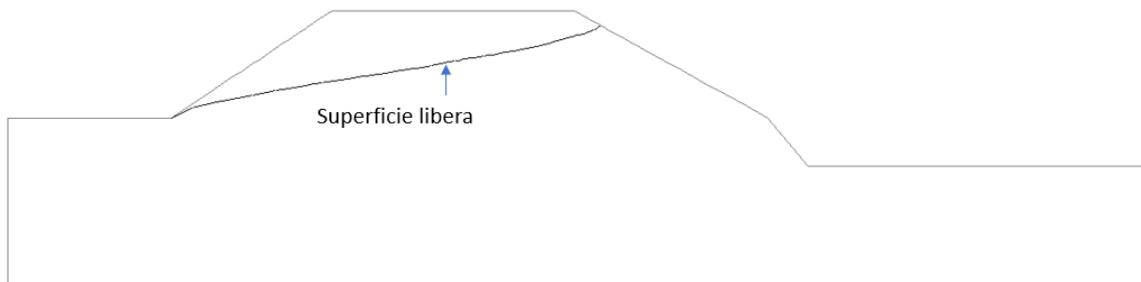
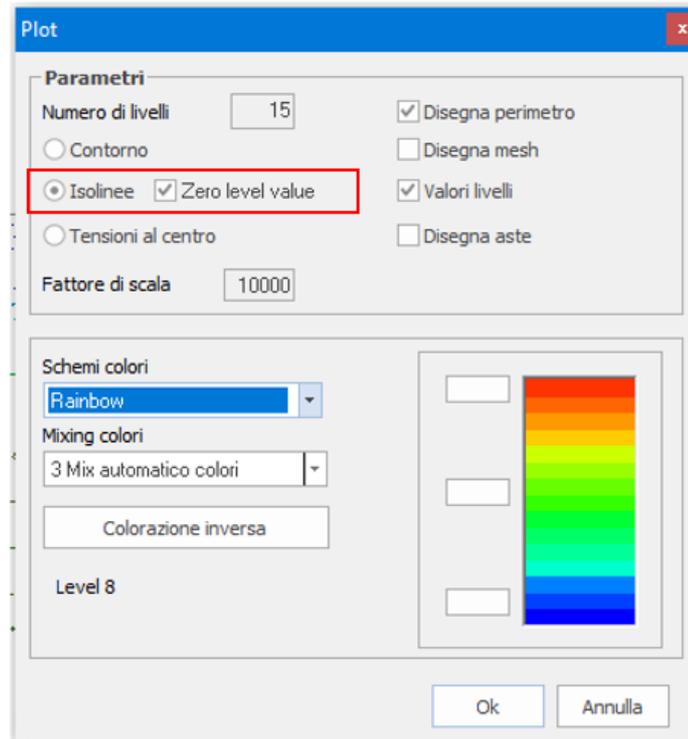
I risultati sono presentati graficamente in termini di Prevalenze totali, Pressioni neutre, Prevalenze di pressione, Velocità totale e Vettori di velocità.





I vettori velocità sono indicatori delle linee di flusso, infatti essi sono tangenti a queste. Linee di flusso e linee equipotenziali (prevalenza totale) si intersecano perpendicolarmente.

Infine per visualizzare la superficie libera dell'acqua all'interno del corpo filtrante, occorre scegliere su Pannello Plot la Visualizzazione proprietà e scegliere Isolinee-Zero level value



7 Condizioni iniziali

Una volta terminata la fase di costruzione e generata la mesh, il modello ad elementi finiti è completo. Le condizioni iniziali sono rappresentate dallo stato iniziale delle acque sotterranee, dalla configurazione geometrica iniziale e dallo stato tensionale iniziale effettivo.

7.1 Condizione iniziale delle acque sotterranee

Il livello freatico si può definire come il luogo dei punti in cui la pressione dell'acqua è pari a 0. Inserendo la "superficie freatica", in condizioni idrostatiche, il valore della pressione neutra aumenta, in modo lineare, con la profondità e in funzione del suo peso specifico (Figura 16). Il carico esterno dovuto al "serbatoio" (carico idraulico) si modella applicando una tensione normale agente sulla superficie del pendio di

intensità pari alla pressione esercitata dall'acqua. Così come mostra la Figura 47, la tensione applicata aumenta linearmente con la profondità nella parte inclinata del pendio, mentre assume valore costante lungo il livello di fondazione.

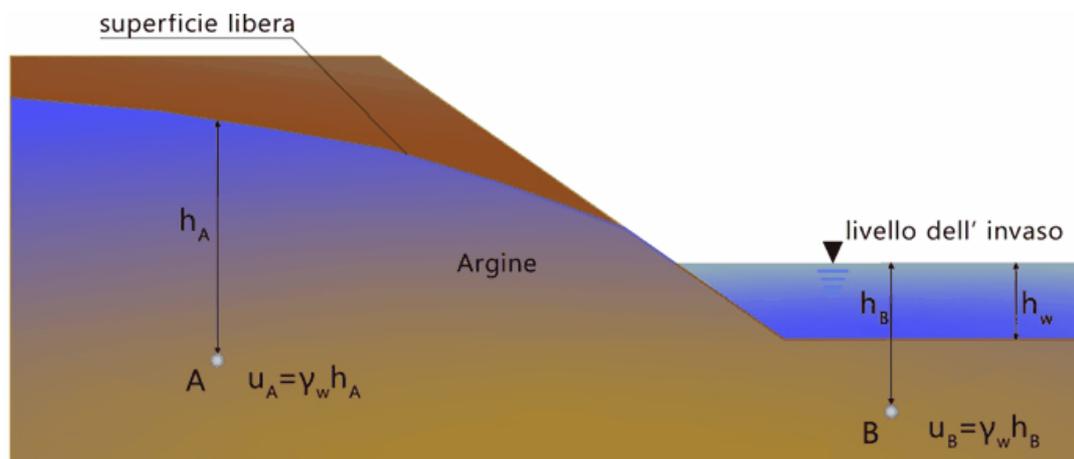


Fig. 46. Modellazione della superficie libera.

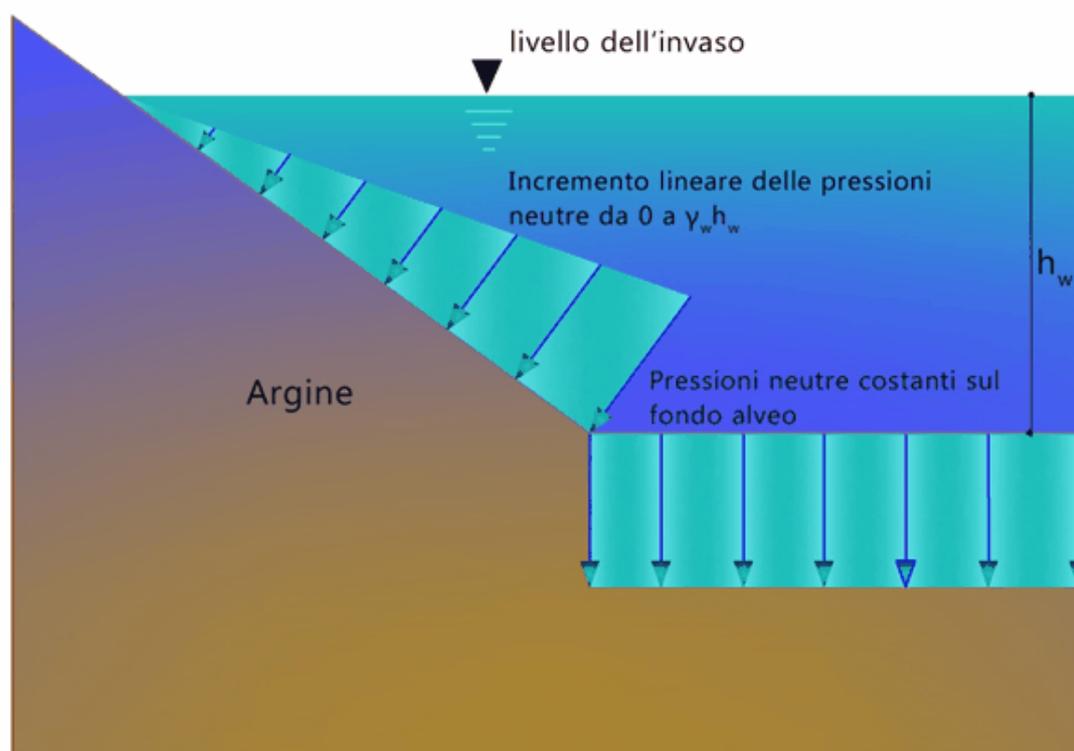


Fig. 47. Carico del serbatoio.

Queste tensioni vengono poi convertite in carichi equivalenti applicati ai nodi degli elementi finiti che compongono la mesh. Le falde freatiche

sono definite da due o più punti e non sono in grado di interagire con la struttura geometrica del modello. Al di sopra del livello freatico la pressione interstiziale sarà nulla, mentre, al di sotto, si verifica una distribuzione idrostatica della pressione in ciascun punto d'integrazione di Gauss.

Le condizioni iniziali delle acque sotterranee si generano in due differenti modi: il primo consiste nella definizione del livello di falda freatica e nella generazione della pressione interstiziale, mentre il secondo consiste nell'analisi esplicita del flusso stazionario che richiede la definizione dei carichi totali sui bordi della mesh di elementi finiti.

7.2 Tensioni geostatiche iniziali

Le condizioni di tensione iniziale si possono generare in due differenti modi: il primo consiste in un'analisi esplicita della tensione agli elementi finiti tenendo conto dei carichi gravitazionali della massa e il secondo attraverso la procedura semplificata K_0 . La procedura K_0 può essere utilizzata unicamente in terreni che presentino strati orizzontali e, dove presente, con livello di falda orizzontale.

Nel caso di elasticità lineare si ha la seguente relazione:

$$\sigma_x = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \quad (203)$$

dove σ_x e σ_y rappresentano, rispettivamente, le tensioni normali laterali e verticali e ν il rapporto di Poisson.

Questa equazione può essere riscritta come:

$$\sigma_x = K_0 \sigma_y \quad (204)$$

dove K_0 rappresenta il coefficiente laterale di spinta a riposo del terreno.

Le direzioni principali, grazie alla simmetria geometrica, sono:

$$\sigma_z = \sigma_x = K_0 \sigma_y \quad (205)$$

mentre le tensioni di taglio sono nulle. Il valore del coefficiente K_0 può variare tra 0 e 1.

GFAS offre la possibilità di inserire valori arbitrari che generano uno stato tensionale geostatico iniziale prima di ogni fase di costruzione.

In contrapposizione alla procedura semplificata che sfrutta il K_0 , il calcolo delle tensioni iniziali può avvenire conducendo un'analisi esplicita della tensione agli elementi finiti basata sui carichi gravitazionali, che può essere eseguita su qualsiasi forma geometrica e che determina le tensioni iniziali nella massa utilizzando sia l'analisi lineare sia l'analisi elasto-plastica. Questa analisi si effettua nella prima fase di costruzione (prima di ogni altra fase di costruzione o prima fase di carico). Tuttavia, quando si sceglie questa opzione per generare le tensioni iniziali, gli spostamenti risultanti non sono però realistici perché il terreno viene modellato come "appare nella realtà" e il calcolo delle tensioni iniziali non influenza gli spostamenti che saranno valutati nelle fasi successive dell'analisi. Questi spostamenti irreali possono essere settati a zero all'inizio della successiva fase di costruzione.

8 Analisi dinamica e sismica

Le equazioni che governano la risposta dinamica della massa si ricavano imponendo che il lavoro compiuto dalle forze esterne venga assorbito dal lavoro delle forze interne, inerziali e viscosi per ogni piccolo movimento cinematicamente ammissibile. Per un singolo elemento si può scrivere:

$$\int_{V_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} dV + \int_{S_e} \delta \mathbf{u}^T \Phi dS + \sum_{i=1}^n \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{p}_i = \int_{V_e} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{u}}) dV \quad (206)$$

dove:

$\delta \mathbf{u}$ - vettore dei piccoli spostamenti arbitrari

$\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ - vettore delle piccole deformazioni arbitrarie

\mathbf{F} - vettore delle forze di volume

Φ - trazioni superficiali vincolate

\mathbf{p}_i - vettore dei carichi concentrati

$\delta \mathbf{u}_i$ - spostamento del nodo su cui è applicato il carico \mathbf{p}_i

ρ - densità del materiale

\mathbf{K}_d - parametro di smorzamento del materiale

Chiamando con \mathbf{N} le funzioni di forma degli elementi finiti, si ha un campo degli spostamenti \mathbf{u} e le sue derivate (campi di velocità e accelerazione):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= \mathbf{N}\mathbf{d} \\
 \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{N}\dot{\mathbf{d}} \\
 \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{N}\ddot{\mathbf{d}}
 \end{aligned}
 \tag{207}$$

dove il vettore \mathbf{d} contiene gli spostamenti ai nodi degli elementi finiti che saranno solo funzioni del tempo.

Combinando le Equazioni 206 e 207 e tenendo conto che gli spostamenti $\delta\mathbf{u}$ sono arbitrari, si ottengono le seguenti coppie di equazioni ordinarie differenziali del secondo ordine funzioni del tempo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{R}^{\text{int}} = \mathbf{R}^{\text{ext}}
 \tag{208}$$

dove la matrice di massa degli elementi e la matrice di smorzamento sono definite come:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \\
 \mathbf{C} &= \int_{V_e} \kappa_d \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV
 \end{aligned}
 \tag{209}$$

I vettori delle forze interne e dei carichi esterni si ottengono come:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}^{\text{int}} &= \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \\
 \mathbf{R}^{\text{ext}} &= \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{F} dV + \int_{S_e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\Phi} dS + \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i
 \end{aligned}
 \tag{210}$$

Il vettore dei gradi di libertà, per una struttura libera di oscillare, ovvero sottoposta ad un moto armonico per cui ciascun grado di libertà di muove in fase con gli altri, è definito come:

$$\mathbf{d} = \bar{\mathbf{d}} \sin \omega t
 \tag{211}$$

Combinando le Equazioni 208 e 211 e ponendo che $\mathbf{C}=0$ e $\mathbf{R}^{\text{ext}}=0$ si ottiene:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \quad (212)$$

Che rappresenta lo stato basilare dei problemi di vibrazione, in cui \mathbf{K} rappresenta la matrice delle rigidità della struttura ed \mathbf{M} la matrice di massa globale che può essere "lumped" o "consistent".

Gli elementi della matrice di massa "consistent" si ottengono dalla seguente relazione:

$$\mathbf{m} = \rho \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx dy \quad (213)$$

dove \mathbf{N} rappresenta la matrice delle funzioni di forma.

La matrice "lumped" invece si ottiene inserendo la massa m_i delle

particelle ai nodi di ogni elemento in modo tale che $\sum m_i$ sia la massa totale dell'elemento. Inoltre, una matrice "lumped" è diagonale, a differenza della matrice "consistent". Per un elemento quadrilatero a 4 nodi, per esempio, la matrice "lumped" è data da:

$$\mathbf{m} = \rho A / 4 \mathbf{I} \quad (214)$$

dove A rappresenta l'area dell'elemento ed \mathbf{I} la matrice unitaria.

9 Practical Approach

9.1 Analisi di stabilità dei pendii

Il metodo, basato sulla formulazione ad elementi finiti come descritto nei paragrafi precedenti, può trovare applicazione nella modellazione di versanti con complesse configurazioni in due dimensioni. Si possono scegliere diversi modelli costitutivi del terreno come quelli di: Mohr-Coulomb, Von Mises e Drucker Prager. L'equilibrio delle tensioni, delle deformazioni e la resistenza al taglio associata al terreno può quindi essere valutata accuratamente.

Durante l'analisi il programma riduce in maniera graduale le caratteristiche di resistenza dei terreni finché non si raggiunge la rottura. Si valuta quindi il fattore di sicurezza (FS) come il rapporto fra $\tan \phi$ (angolo d'attrito interno) e c (coesione), il FS viene ridotto per ottenere la rottura mantenendo costanti i carichi gravitazionali. Questo tipo di analisi è diversa da quella a capacità portante, in cui la rottura viene indotta

dall'aumento dei carichi senza variare le caratteristiche di resistenza dei materiali.

9.1.1 Fattore di sicurezza (FS) e riduzione del fattore di resistenza (SRF)

I carichi gravitazionali vengono generati automaticamente dal Software, come descritto nella sezione 3.8. Questo tipo di carico si applica al pendio in un singolo incremento. Con una prova ciclica di riduzione del fattore di resistenza si riducono, gradualmente, i parametri di resistenza del terreno finché l'algoritmo fallisce la convergenza. I parametri utilizzati per definire la resistenza del terreno, e che vengono utilizzati nell'analisi elasto-plastica, si ottengono dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\Phi_f &= \arctan(\tan \Phi / SRF) \\ c_f &= c / SRF\end{aligned}\tag{215}$$

dove SRF è il fattore di riduzione di resistenza. Fintanto che non si verifichi il fallimento della convergenza, il codice di calcolo tenta diversi incrementi del fattore SRF, che, al momento della rottura, viene interpretato come un fattore di sicurezza (FS). Il calcolo quindi non converge poiché non è stato possibile trovare una configurazione della distribuzione delle tensioni che soddisfi il criterio di rottura e l'equilibrio globale.

9.1.2 Proprietà dei materiali

Il modello costitutivo di Mohr-Coulomb è il modello più utilizzato nelle applicazioni geotecniche per descrivere il comportamento dei terreni. Il criterio di Mohr-Coulomb mette in relazione la resistenza al taglio del materiale con la coesione, la tensione normale e l'angolo d'attrito interno del materiale. La superficie di rottura del materiale è stata già presentata nel capitolo 5 ed è definita dall'Equazione 63. Per definire il modello di Mohr-Coulomb, sono richieste sei proprietà dei materiali, ovvero:

- Angolo di resistenza a taglio ϕ
- Coesione c
- Angolo di dilatanza ψ
- Modulo di Young E
- Rapporto di Poisson ν

- Peso per unità di volume γ

Il modulo di Young e il rapporto di Poisson hanno un'enorme influenza sulle deformazioni calcolate prima che giunga a rottura il versante, ma invece hanno una scarsa influenza sul fattore di sicurezza nell'analisi di stabilità dei pendii. L'angolo di dilatanza ψ influenza direttamente la variazione di volume durante il cedimento del terreno. Se $\psi = \phi$ le leggi del flusso plastico sono "associate" mentre se $\psi \neq \phi$ si assume un flusso plastico "non-associato". La variazione di volume durante la rottura viene presa in considerazione tramite il valore del coefficiente ψ .

9.1.3 Crollo del pendio

La non convergenza del metodo in un numero specifico di iterazioni (definite dall'utente), nel Software viene considerata come un indicatore della rottura del pendio a cui si associa un notevole incremento degli spostamenti. Il valore del massimo spostamento nodale, appena dopo la rottura, se confrontato con quello prima della mancata convergenza subisce un incremento significativo.

9.1.4 Esempi di calcolo

9.1.4.1 Caso 1: analisi di stabilità di pendio

Si vuole analizzare un problema di stabilità di versante: i materiali sono caratterizzati dal modello costitutivo di Mohr-Coulomb e i carichi agenti sono essenzialmente di tipo gravitazionale. La verifica consiste nel calcolare il fattore di sicurezza (FS), definito come il rapporto fra \tan (angolo d'attrito interno) e c (coesione), che viene gradualmente ridotto fino a rottura, mantenendo costanti i carichi gravitazionali. In Figura 48 sono riportati i dati geometrici del pendio omogeneo oggetto di analisi, mentre le proprietà dei materiali e le caratteristiche di resistenza si riassumono in Tabella 5. In questo caso specifico non si considera la variazione di volume che avviene durante la rottura e si pone pari a 0 il valore dell'angolo di dilatanza.

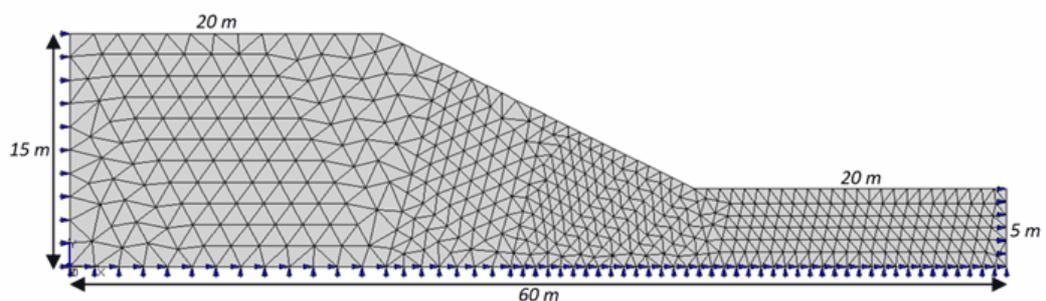


Fig. 48. Mesh e dati dell'analisi di stabilità del pendio.

Modulo di Young E [kN/m ²]	Rapporto di Poisson ν	Peso per unità di volume γ [kN/m ³]	Angolo di resistenza a taglio ϕ [gradi]	Coesione c [kN/m ²]	Dilatanza ψ [gradi]
1×10^5	0.3	20	20	15	0

Tabella 5. Proprietà dei materiali

Il modello tiene conto del carico gravitazionale e il fattore di riduzione della resistenza (SRF) aumenta in maniera graduale finché non si verifica la convergenza.

I risultati dell'analisi sono riportati in Tabella 6, in cui sono stati indicati i fattori di resistenza ridotti con i corrispondenti valori dei massimi spostamenti nodali associati ed il numero di iterazioni necessarie ad ottenere la convergenza.

SRF	Iterazione	Spostamento Massimo [cm]	Convergenza
1	3	1.701124	OK
1.1	4	1.736134	OK
1.2	5	1.790464	OK
1.3	5	1.849957	OK
1.4	5	2.001791	OK
1.5	6	2.030693	OK
1.6	7	2.355417	OK
1.7	11	2.815264	OK
1.8	17	8.270803	OK
1.9	60	43.42037	OK
2	200	78.18229	Failed

Tabella 6. Sintesi dei risultati raggiunti dall'analisi di stabilità del pendio

La convergenza fallisce quando il valore di SRF è pari a 2, ma, osservando in modo critico i risultati raggiunti, si può dire che già da un SRF pari a 1.6 i valori ottenuti non risultano accettabili: si registra infatti, una prima variazione di 0.5 cm (passando da FS=1.6 a FS=1.7), e successivamente una variazione di ben 5 cm, al passaggio da FS=1.7 a FS=1.8.

I risultati dell'analisi sono rappresentati nel grafico riportato in Figura 48: si può osservare come gli spostamenti aumentino rapidamente dal valore di SRF pari a 1.7 in poi.

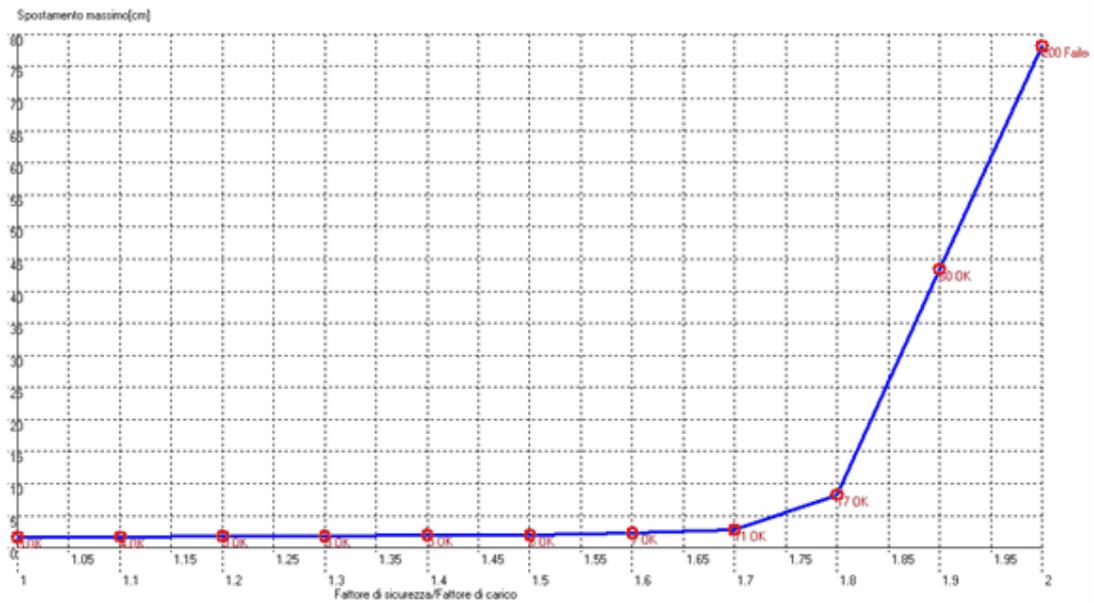


Fig. 48. Grafico del massimo spostamento e del Fattore di Riduzione della Resistenza (SRF).

Nelle Figure 49 e 50 sono rappresentate la mesh deformata a rottura e gli spostamenti registrati: il meccanismo di rottura è chiaramente localizzato al piede del pendio.

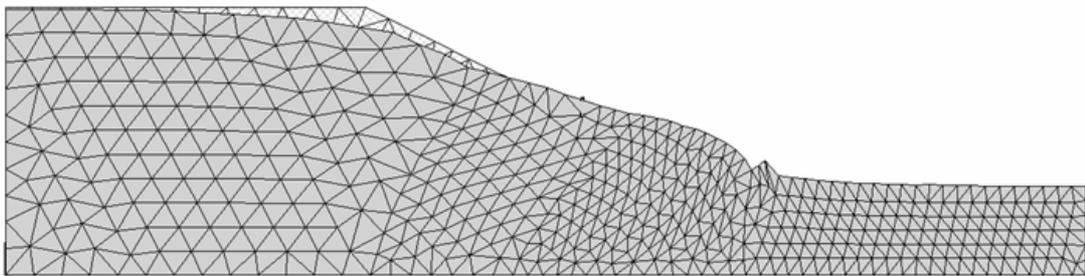


Fig. 49. Mesh deformata

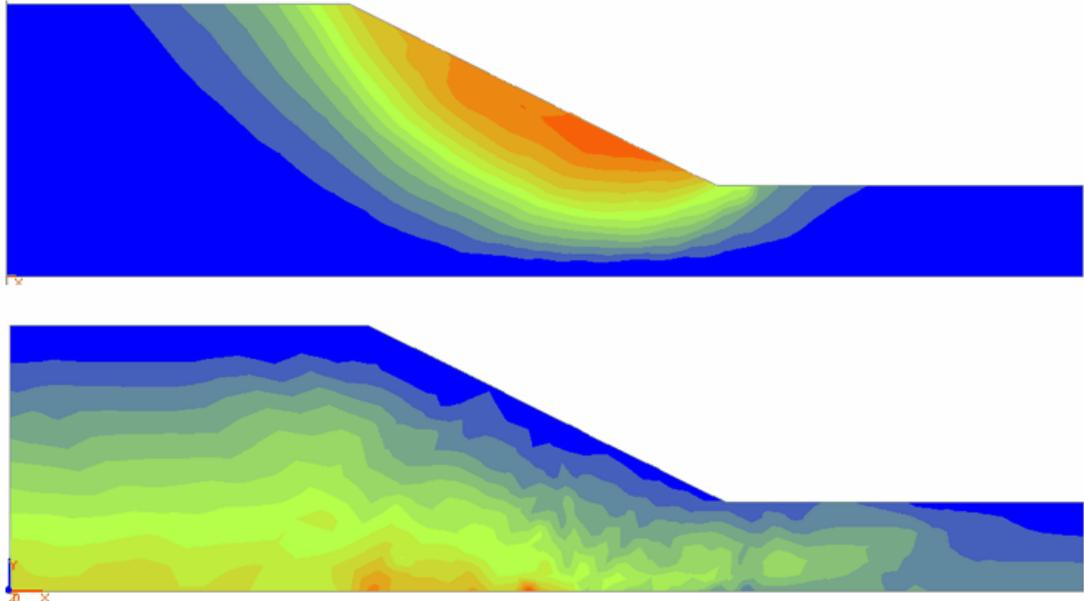


Fig. 50. Spostamenti totali e tensioni di Von Mises.

Confronto con i Metodi dell'Equilibrio Limite

Per avvalorare i risultati raggiunti con l'analisi di stabilità, eseguita con i Metodi numerici ad Elementi Finiti (FEM), è di seguito confrontata con i classici Metodi dell'Equilibrio Limite (LEM) di Bishop e di Morgenstern. I risultati raggiunti, con entrambi i metodi, hanno condotto ad un valore del fattore di sicurezza pari ad 1.59, perciò del tutto simile a quello raggiunto con i metodi FEM.

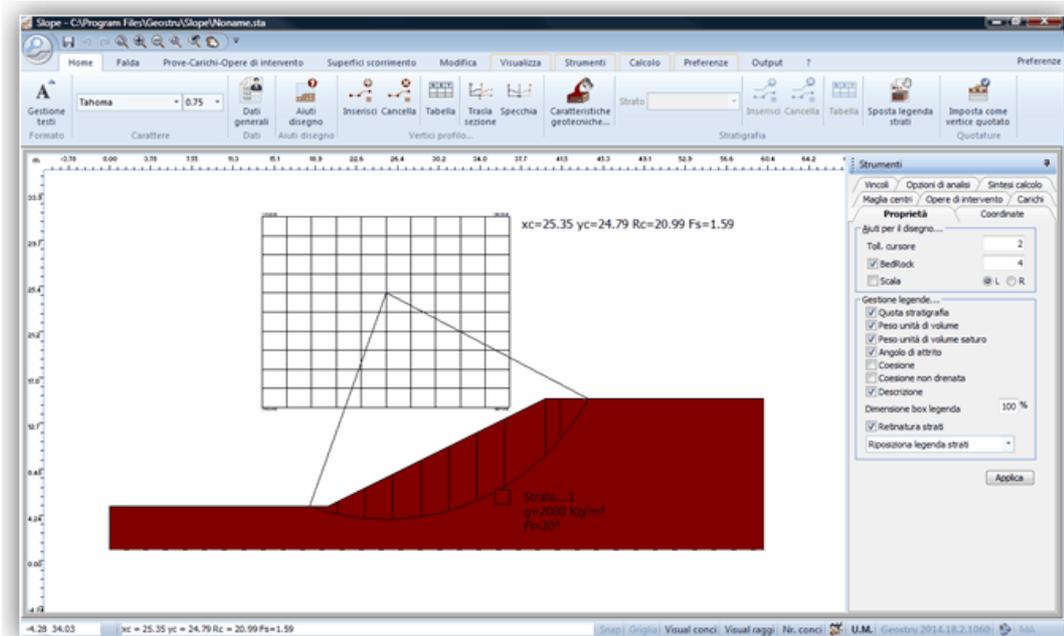


Fig. 51. Simulazione effettuata in Slope con i Metodi di Bishop e Morgenstern

9.1.4.2 Caso 2: interscambio Slope-GFAS

Una caratteristica peculiare dei Software GeoStru è l'interscambio dati che è possibile effettuare da un Software all'altro. In particolare, l'esempio che viene proposto di seguito, rappresenta l'analisi di stabilità di un versante a partire da un modello generato in Slope, e di seguito importato in GFAS. Si ipotizza di avere, in Slope, il modello rappresentato nella Figura 52:

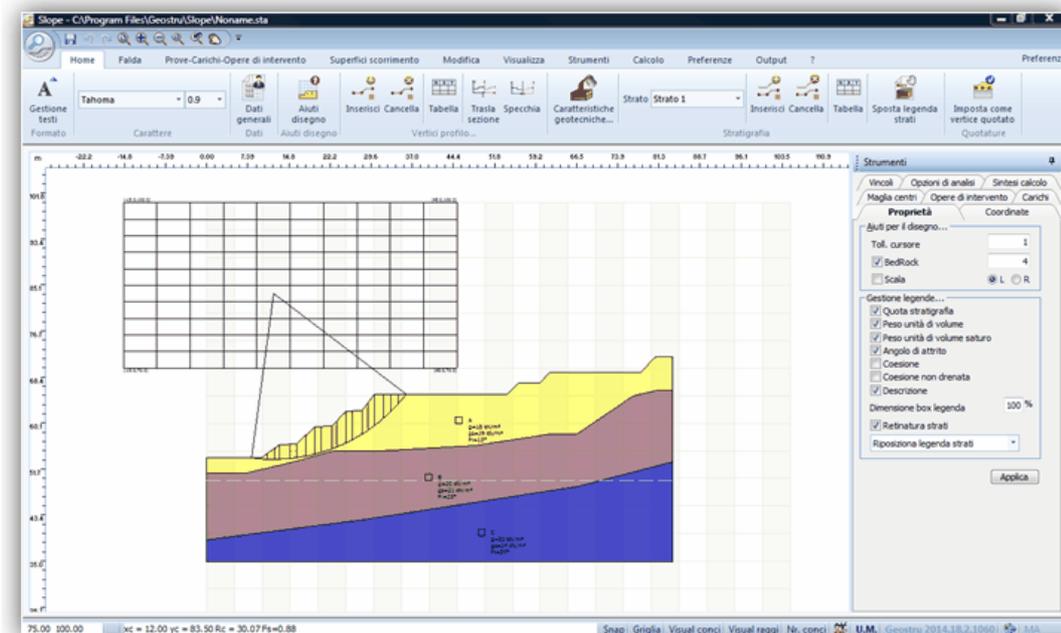


Fig. 52. Modello creato in Slope

L'azione di interscambio avviene selezionando, dal menù File, l'opzione Esporta modello GFAS: il programma crea un file con estensione .txt contenente le coordinate del profilo e le coordinate delle interfacce degli strati. Il file di testo è strutturato in maniera tale che, una volta importato in GFAS, generi le regioni omogenee a partire dalle coordinate dei singoli strati.

Si procede con l'importazione in GFAS, selezionando dal pulsante Genera mesh di calcolo l'opzione Import (Figura 53).



Fig. 53. Modello importato in GFAS

Nell'analisi di stabilità proposta i materiali sono caratterizzati dal modello costitutivo di Mohr-Coulomb: nella Tabella 7 sono riassunti i dati geotecnici dei terreni che costituiscono la stratigrafia del versante e le relative caratteristiche di resistenza. In questo caso specifico non si considera la variazione di volume che avviene durante la rottura e si pone pari a 0 il valore dell'angolo di dilatazione.

N-STRATO	MODULO ELASTICO [KN/m ²]	PESO SATURO [KN/m ³]	COESIONE [KN/m ²]	ANGOLO DI RESISTENZA AL TAGLIO DI PICCO [gradi]	RAPPORTO DI POISSON
1	10000	18	5	15	0.3
2	18000	20	10	25	0.3
3	30000	23	3	35	0.15

Tabella 7. Caratteristiche geotecniche dei materiali

Una volta terminata la fase di costruzione e generata la mesh, si inseriscono le condizioni iniziali e le condizioni al contorno del sistema (Figura 54).

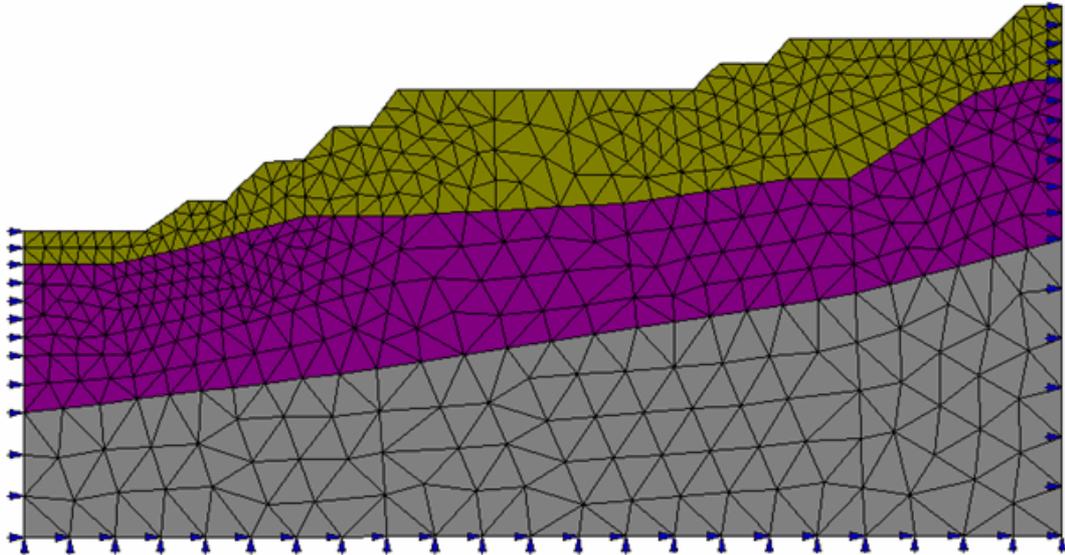


Fig. 54. Modello pronto per l'analisi di stabilità

Si esegue un'analisi non lineare per la ricerca del fattore di sicurezza, sfruttando il metodo a rigidità costante e trascurando le azioni dinamiche.

Durante l'analisi, i parametri caratteristici dei terreni vengono gradualmente ridotti, finché l'algoritmo non fallisce la convergenza: a quel punto il fattore di riduzione SRF determinato si assume come un fattore di sicurezza (FS). L'analisi fallisce la convergenza con un fattore di sicurezza pari a 1.2, come mostra il grafico riportato di seguito (Figura 55), settando a 300 il numero di iterazioni.

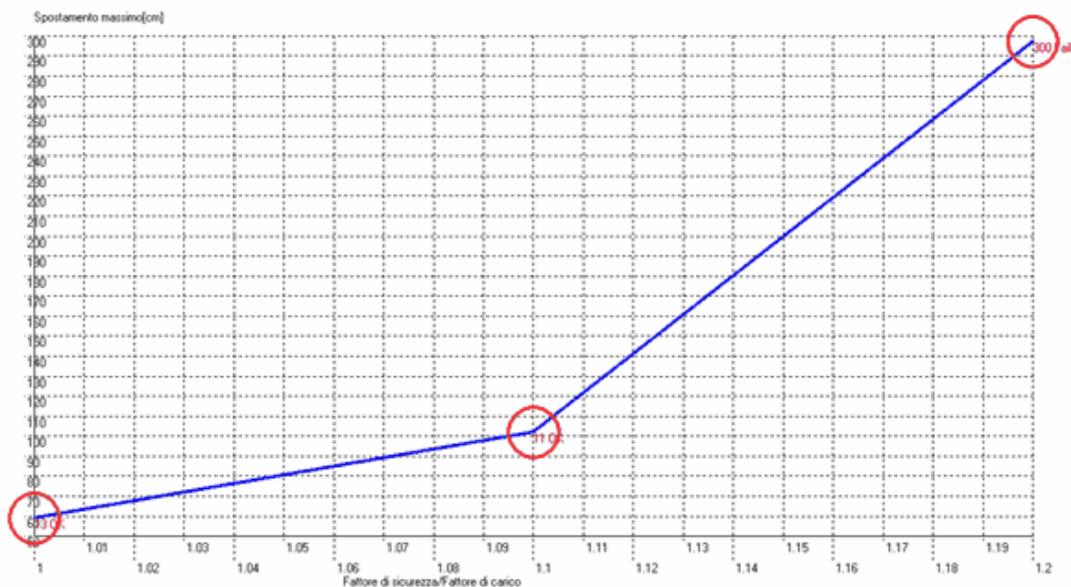


Fig. 55. Grafico Fattore di sicurezza-Spostamento massimo

In termine di spostamento, il calcolo ha condotto ai seguenti risultati (Tabella 8):

FS	Iterazione	Spostamento massimo	Convergenza
0.5	2	57.119	OK
0.6	2	57.11904	OK
0.7	4	57.165	OK
0.8	4	57.50441	OK
0.9	6	58.15847	OK
1	16	59.33801	OK
1.1	20	91.78532	OK
1.2	300	295.3759	Failed

Tabella 8. Valori riassuntivi dell'analisi di stabilità

L'analisi chiaramente mette in luce una forte instabilità del versante già per FS=0.9, si registra una variazione del tutto evidente dello spostamento.

Inoltre la simulazione consente di visualizzare la sezione deformata e gli spostamenti ottenuti (Figure 56 e 57).

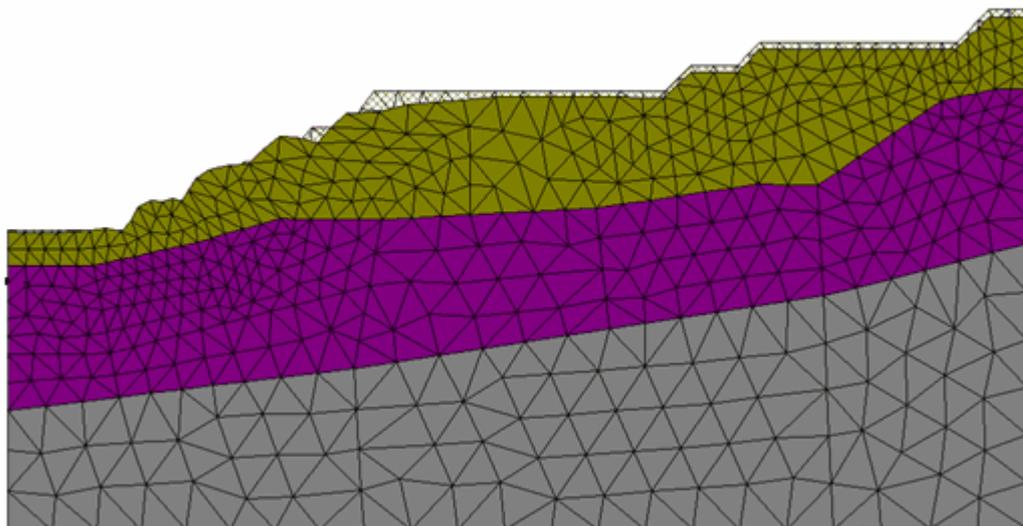


Fig. 56 Grafico Fattore di sicurezza-Spostamento massimo

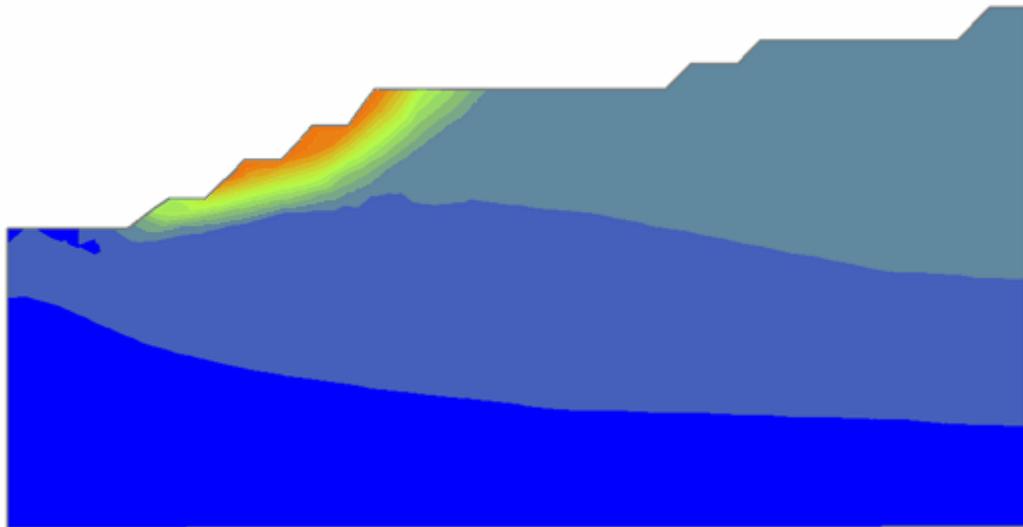


Fig. 57. Grafico Fattore di sicurezza-Spostamento massimo

Confronto con i Metodi dell'Equilibrio Limite

Anche in questo secondo caso analizzato, i risultati ottenuti dalla simulazione con i Metodi agli Elementi Finiti sono stati confrontati con quelli ottenuti dai Metodi dell'Equilibrio Limite (Tabella 9). Entrambi i metodi hanno riportato valori, in termine di Fattore di Sicurezza, simili.

	FS
FEM	0.9
Bishop	0.88
Morgenstern	0.88

Tabella 9. Valori riassuntivi dell'analisi di stabilità (FEM-LEM)

9.1.4.3 Caso 3: Interazione Terreno Struttura

Il primo caso riguarda la progettazione di un edificio fondato su pendio poggiante su un sottosuolo stratificato con diverso comportamento meccanico.

I materiali litologici di cui è costituita la sezione sono:

materiale 1 (terreno limoso-sabbioso):

$\gamma = 20 \text{ KN/m}^3$, $\varphi = 27^\circ$, $c = 8 \text{ KN/m}^2$, $E = 18000 \text{ KN/m}^2$, Poisson $\nu = 0.3$.

materiale 2 (terreno limoso-argilloso):

$\gamma = 19 \text{ KN/m}^3$, $\varphi = 22^\circ$, $c = 10 \text{ KN/m}^2$, $E = 5000 \text{ KN/m}^2$, Poisson $\nu = 0.4$.

materiale 3 (substrato roccioso):

$\gamma = 27 \text{ KN/m}^3$, $\varphi = 45^\circ$, $c = 0 \text{ KN/m}^2$, $E = 98000 \text{ KN/m}^2$, Poisson $\nu = 0.15$

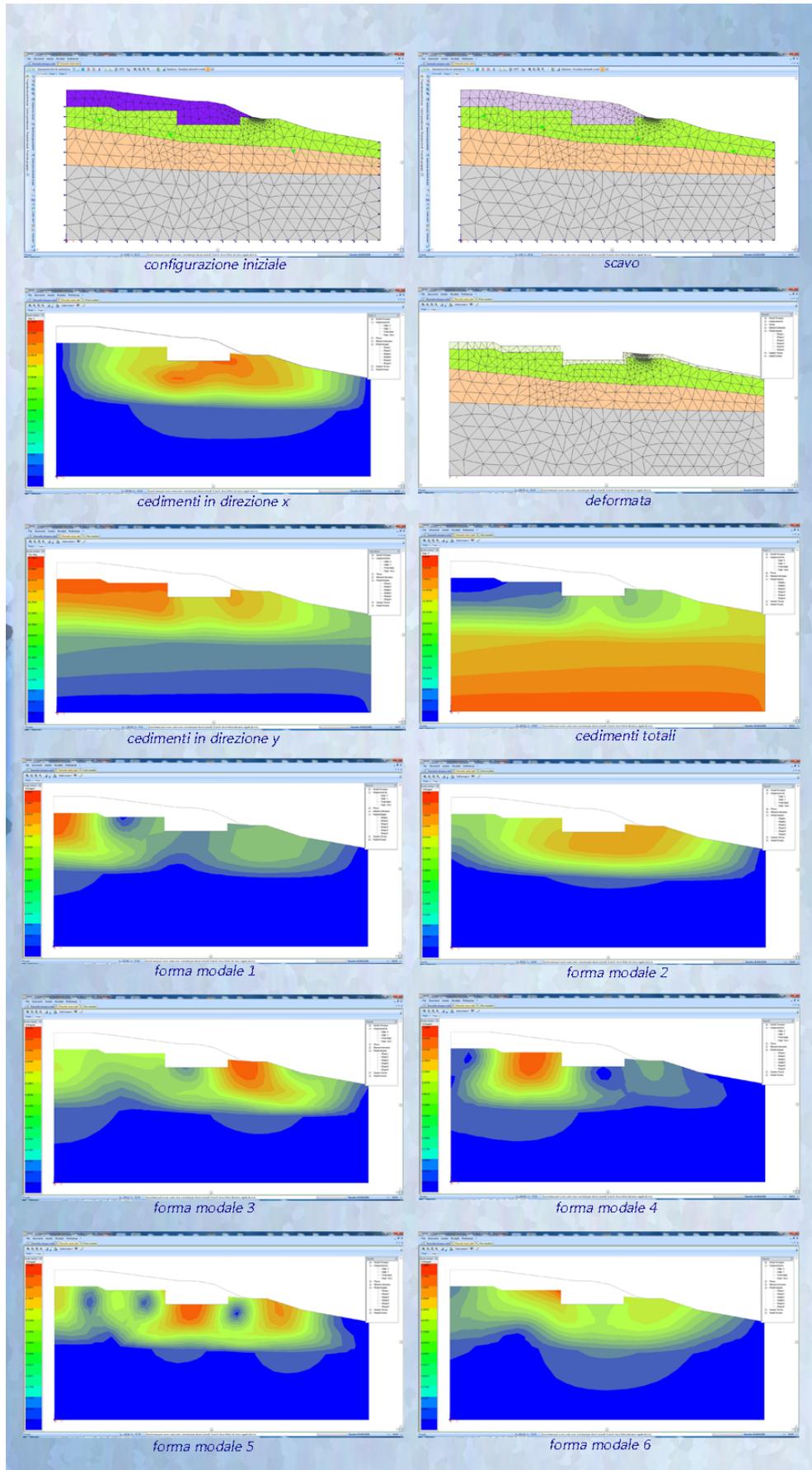
E' presente la falda , la linea piezometrica è definita all'interno del primo strato e passa a circa 4 metri di profondità dal centro della superficie d'imposta della fondazione.

E' stata eseguita un'analisi dinamica non lineare ed esaminati i seguenti due casi :

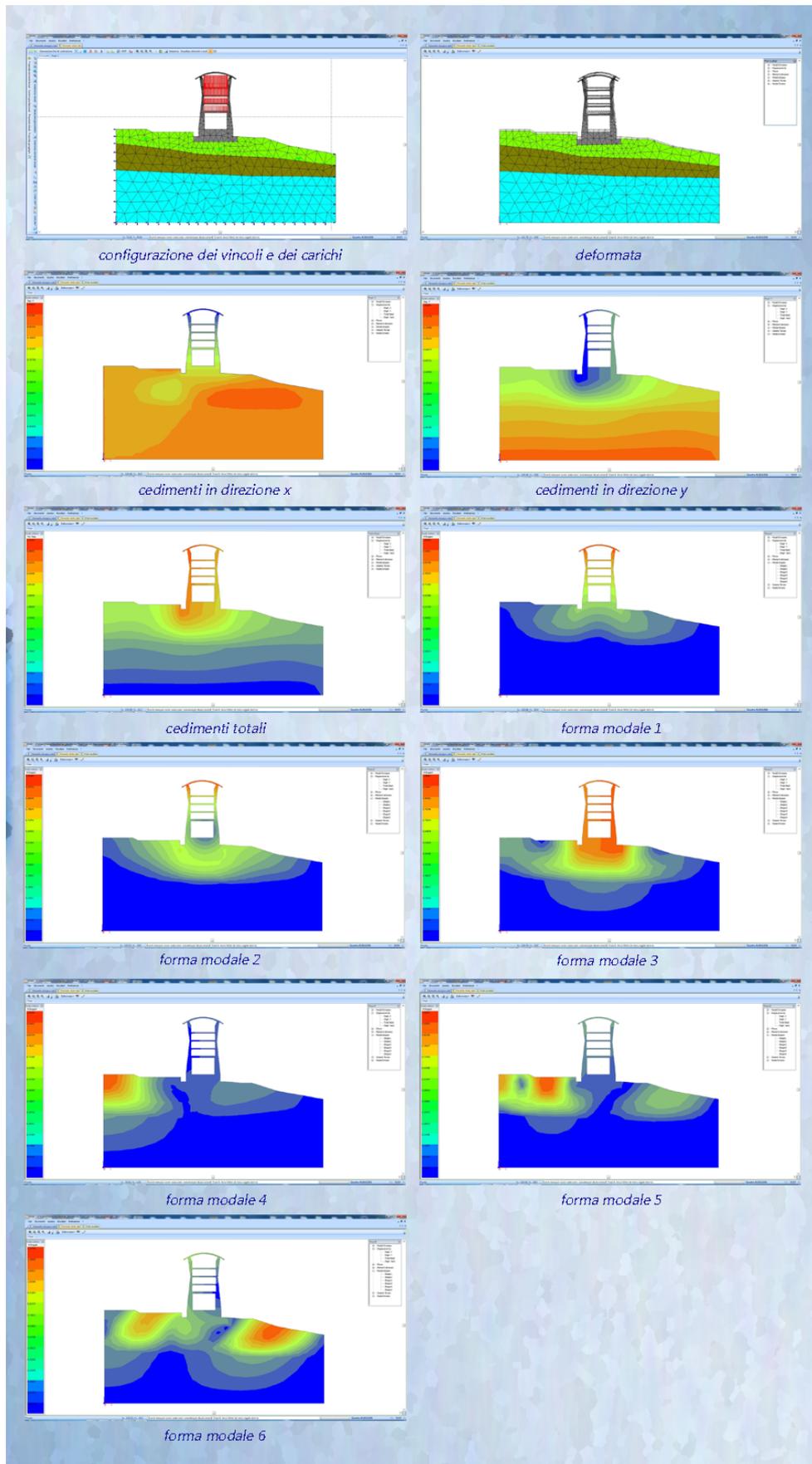
1. fase di scavo, sbancamento con esportazione di una parte del terreno limoso sabbioso e realizzazione della superficie d'imposta della fondazione.
2. fase di esercizio, inizia al termine della costruzione della struttura.

Per la valutazione dell'azione sismica è stata eseguita un'analisi modale considerando uno spettro di risposta elastico di tipo 2 e categoria di terreno B, accelerazione di progetto pari a 2.15 m/s^2 coefficiente di viscosità uguale al 5% (EC8).

FASE DI SCAVO



FASE DI ESERCIZIO



In questo caso il volume di terreno interagisce con un insieme di opere , edifici fondati su pendii opere sotterranee e muro di sostegno.

Le caratteristiche litologiche dei due materiali della sezione geotecnica sono:

materiale 1:

$\gamma = 19 \text{ KN/m}^3$, $\varphi = 27^\circ$, $c = 8 \text{ KN/m}^2$, $E = 20000 \text{ KN/m}^2$, Poisson $\nu = 0.3$;

materiale 2 :

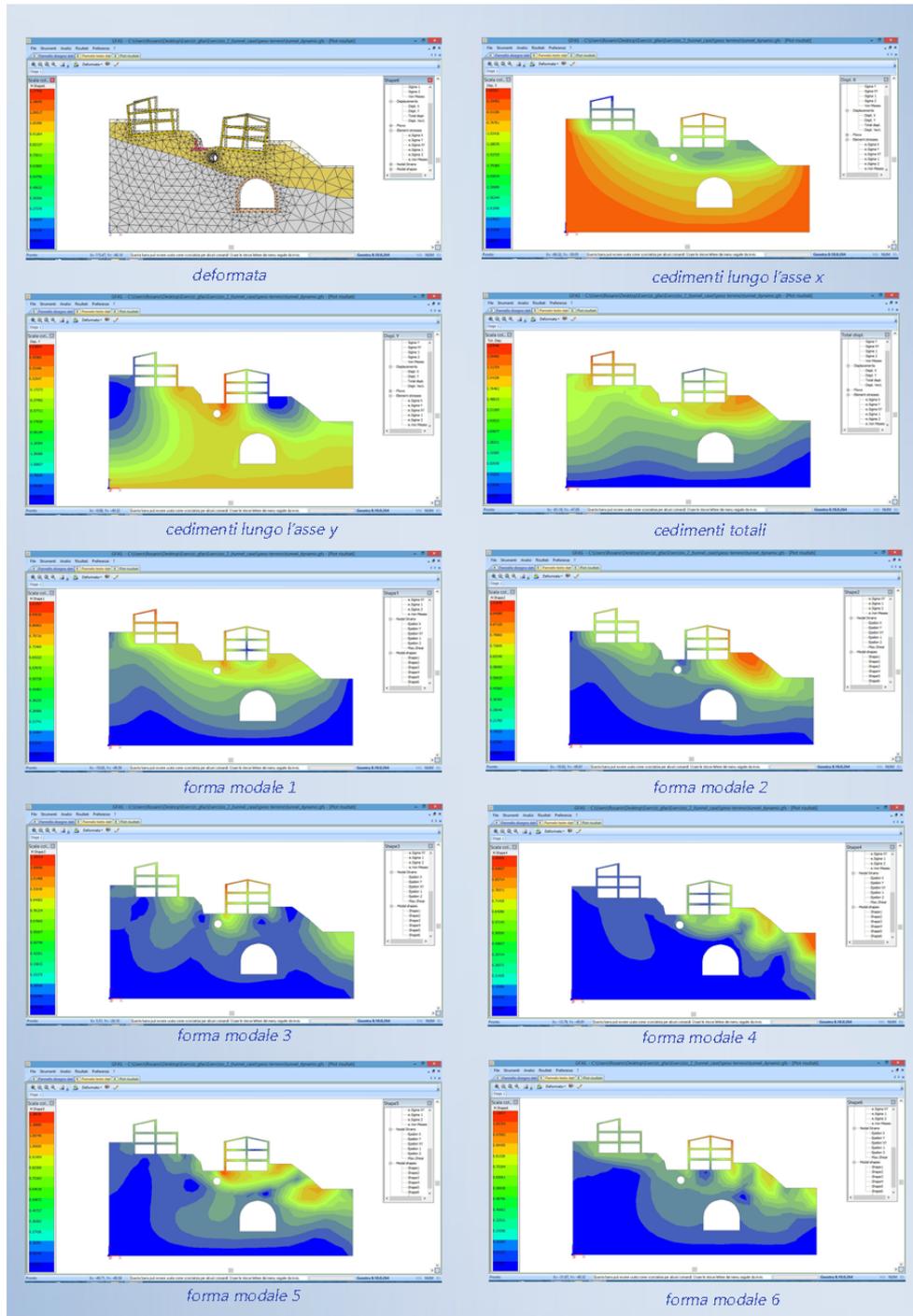
$\gamma = 27 \text{ KN/m}^3$, $\varphi = 45^\circ$, $c = 0 \text{ KN/m}^2$, $E = 95000 \text{ KN/m}^2$, Poisson $\nu = 0.2$;

Per le opere sono stati considerati i seguenti parametri di resistenza:

$\gamma = 25 \text{ KN/m}^3$, $E = 45000000 \text{ KN/m}^2$, Poisson $\nu = 0.15$;

$\gamma = 25 \text{ KN/m}^3$, $E = 35000000 \text{ KN/m}^2$, Poisson $\nu = 0.15$.

Per la valutazione dell'azione sismica è stata eseguita un'analisi modale considerando uno spettro di risposta elastico di tipo 1 e categoria di terreno C, accelerazione di progetto pari a 2.25 m/s^2 coefficiente di viscosità uguale al 5% (EC8). È stata eseguita un'analisi dinamica non lineare utilizzando un solutore che si basa sul metodo di Newton-Raphson completo, il comportamento elastoplastico del terreno è stato simulato applicando il criterio di snervamento di Drucker-Prager.



Viene affrontato il problema dell'interazione della fondazione di un pilone da ponte con il terreno sottostante. Lo schema strutturale è costituito da due campate di 60 m di luce sostenute da 12 stralli per campata, disposte a semiarpa e sostenute, pressochè simmetricamente, dal pilone centrale il quale è fondato su un plinto di dimensioni 12 x 8 m, di spessore pari a 3 m di cui la parte superiore, di 1.50 m, troncopiramidale.

Il dislivello massimo dell'impalcato rispetto al fondo dell'alveo è di circa 25 m il franco di sicurezza del livello massimo del pelo libero della corrente è di circa 6 m.

Le caratteristiche litologiche dei due materiali della sezione geotecnica sono:

materiale 1:

$\gamma = 19 \text{ KN/m}^3$, $\varphi = 20^\circ$, $c = 15 \text{ KN/m}^2$, $E = 20000 \text{ KN/m}^2$, Poisson $\nu = 0.3$;

materiale 2 :

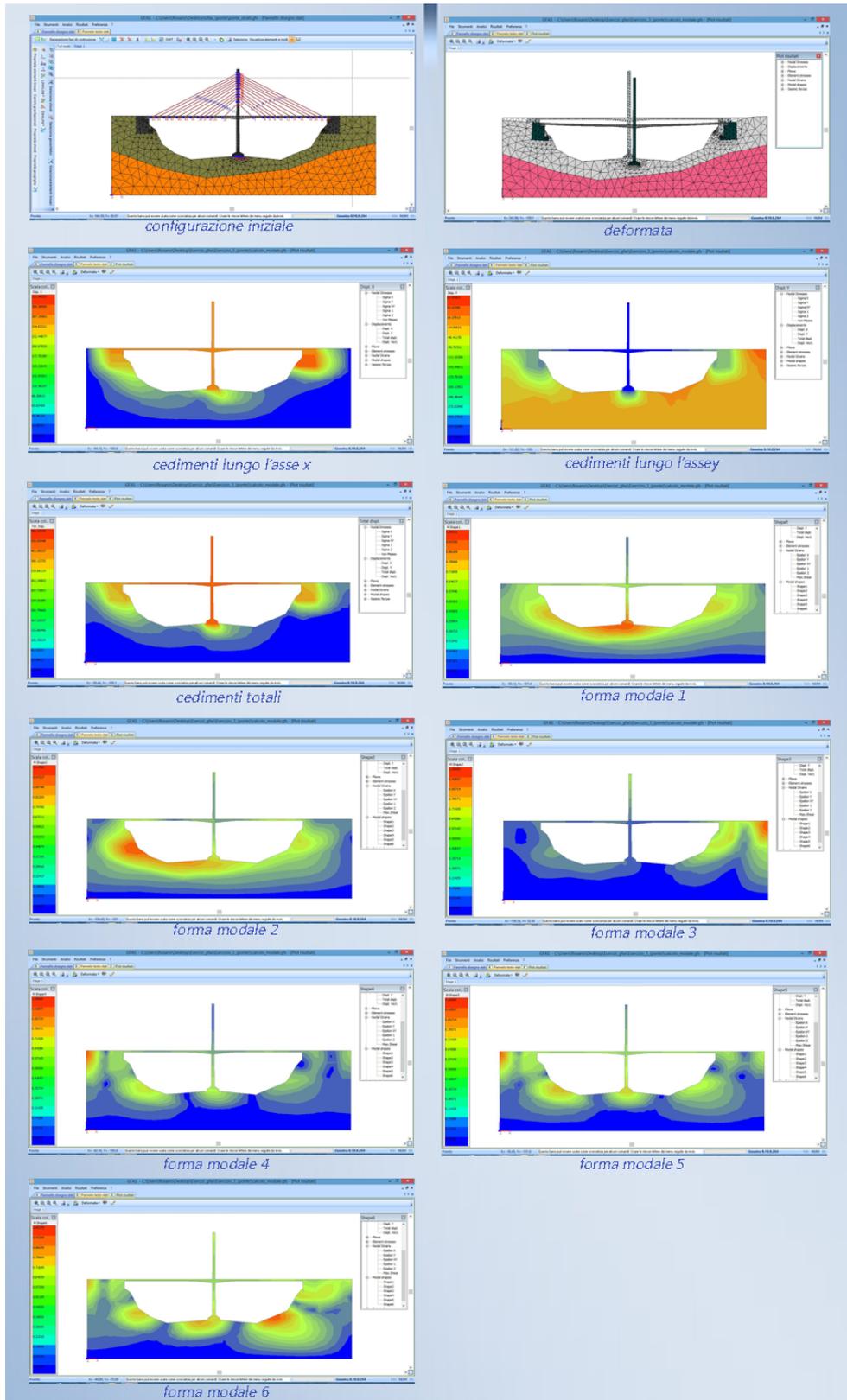
$\gamma = 27 \text{ KN/m}^3$, $\varphi = 45^\circ$, $c = 0 \text{ KN/m}^2$, $E = 95000 \text{ KN/m}^2$, Poisson $\nu = 0.2$;

Per le opere sono stati considerati i seguenti parametri di resistenza:

$\gamma = 25 \text{ KN/m}^3$, $E = 45000000 \text{ KN/m}^2$, Poisson $\nu = 0.15$;

$\gamma = 25 \text{ KN/m}^3$, $E = 43000000 \text{ KN/m}^2$, Poisson $\nu = 0.15$.

Per la valutazione dell'azione sismica è stata eseguita un'analisi modale considerando uno spettro di risposta elastico di tipo 1 e categoria di terreno B, accelerazione di progetto pari a 2.0 m/s^2 coefficiente di viscosità uguale al 5% (EC8). E' stata eseguita un'analisi dinamica non lineare utilizzando un solutore che si basa sul metodo di Newton-Raphson modificato, il comportamento elastoplastico del terreno è stato simulato applicando il criterio di snervamento di Drucker-Prager.



9.1.4.4 Caso 4: Filtrazione

Si affrontano adesso due problemi di filtrazione dell'acqua nel terreno. Un caso pratico è costituito da una traversa fluviale che sostiene un livello costante $h=7\text{m}$ di acqua fondata su uno strato di terreno permeabile non omogeneo, che appoggia su uno strato impermeabile di roccia. Il flusso dell'acqua è causato dal carico idraulico e definisce la condizione limite del potenziale mentre il substrato roccioso e l'opera stessa definiscono il contorno dei materiali impermeabili.

I materiali litologici di cui è costituita la sezione possiedono le seguenti caratteristiche di resistenza e permeabilità:

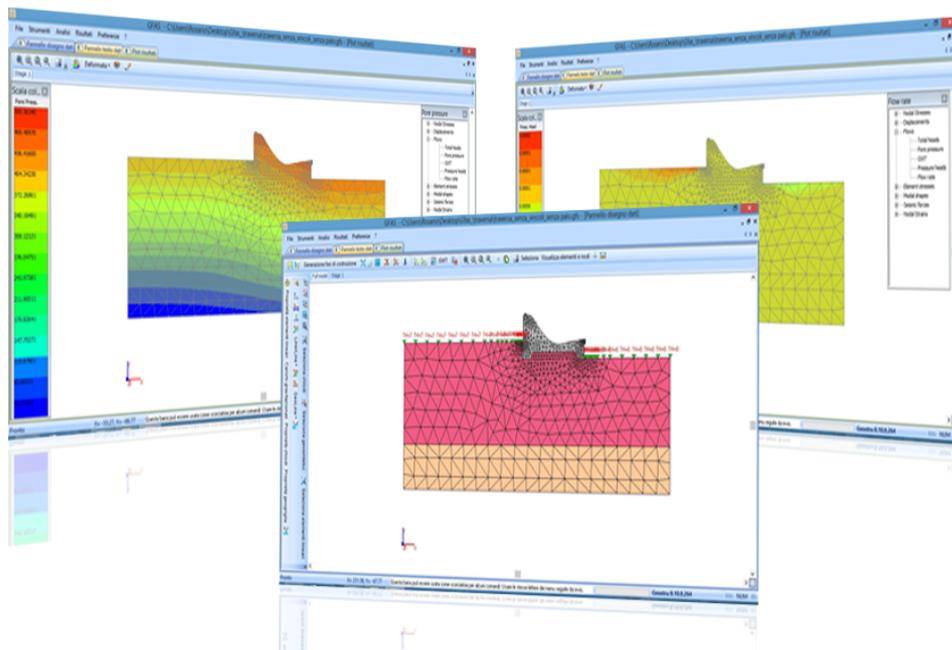
materiale 1 :

$\gamma = 17 \text{ KN/m}^3$, $\varphi = 15^\circ$, $c = 8 \text{ KN/m}^2$, $E = 4500 \text{ KN/m}^2$, Poisson $\nu = 0.3$,
 $K_x = 2.7 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$, $K_y = 6.7 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$

materiale 2 :

$\gamma = 24 \text{ KN/m}^3$, $\varphi = 45^\circ$, $c = 0 \text{ KN/m}^2$, $E = 32000000 \text{ KN/m}^2$, Poisson $\nu = 0.2$, $K_x = K_y = 1 \cdot 10^{-12} \text{ m/s}$,

La permeabilità assegnata al materiale di cui è realizzata la traversa fluviale è pari a $K_x = K_y = 1 \cdot 10^{-13} \text{ m/s}$.



L'altro caso analizzato è un classico esempio riportato nei testi specifici del settore, si tratta di una palancolata che sostiene un livello d'acqua, infissa nel terreno fino alla profondità di 3 m.

il moto è confinato sia lateralmente che inferiormente da strati impermeabili mentre a monte e a valle della stessa si assegna, rispettivamente un carico di 100 e 0m, le superfici su cui agisce il carico costituiscono delle superfici equipotenziali.

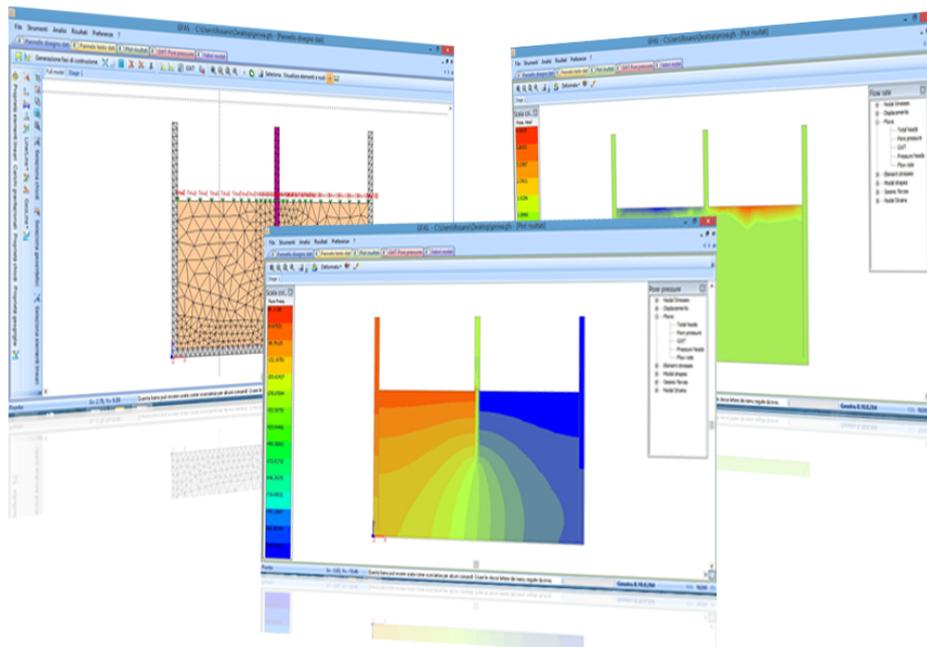
Il mezzo all'interno del quale si sviluppa il moto di filtrazione è omogeneo sia in termini di resistenza che di permeabilità, si riportano di seguito i parametri assegnati ai materiali.

materiale 1 :

$\gamma = 18 \text{ KN/m}^3$, $\phi = 19^\circ$, $c = 15 \text{ KN/m}^2$, $E = 5000 \text{ KN/m}^2$, Poisson $\nu = 0.3$, $K_x = 1 \text{ m/s}$, $K_y = 1 \text{ m/s}$

materiale 2 :

$\gamma = 24 \text{ KN/m}^3$, $\phi = 45^\circ$, $c = 0 \text{ KN/m}^2$, $E = 32000000 \text{ KN/m}^2$, Poisson $\nu = 0.2$, $K_x = K_y = 1 \cdot 10^{-12} \text{ m/s}$,



9.2 Analisi a capacità portante

L'analisi a capacità portante si esegue a partire dalla condizione di deformazione piana e, al fine di visualizzare il comportamento elastoplastico, i carichi sono aumentati in modo incrementale finché non si verifica il collasso. Il metodo effettua le iterazioni a rigidità costante (metodo di Newton Raphson modificato), cosicché il processo di fattorizzazione della matrice delle rigidità è richiamato una sola volta nel programma, mentre la fase di sostituzione all'indietro viene

richiamata in ciascuna iterazione. Diversi criteri di rottura sono stati implementati per rappresentare la resistenza dei terreni: nel caso di terreni dotati di attrito e coesione alla resistenza al taglio è appropriato l'utilizzo del criterio di Mohr Coulomb. Per argille non drenate, senza attrito, invece, occorre utilizzare il criterio di Von-Mises.

L'esempio mostrato nella Figura 58 rappresenta una fondazione poggianti sulla superficie di uno strato di argille uniformi non drenate. Il terreno sottostante sostiene una tensione uniforme q , che viene aumentata in modo incrementale fintanto che si giunge a rottura. Il legame costitutivo del terreno è elasto-plastico definito, nella fase plastica, dal criterio di rottura di Von Mises attraverso tre parametri: il valore della coesione non drenata C_u e le proprietà elastiche del mezzo E e ν . I carichi generano una tensione uniforme pari a 1 kN/m^2 nel piano di semi-ampiezza pari a 4 m .

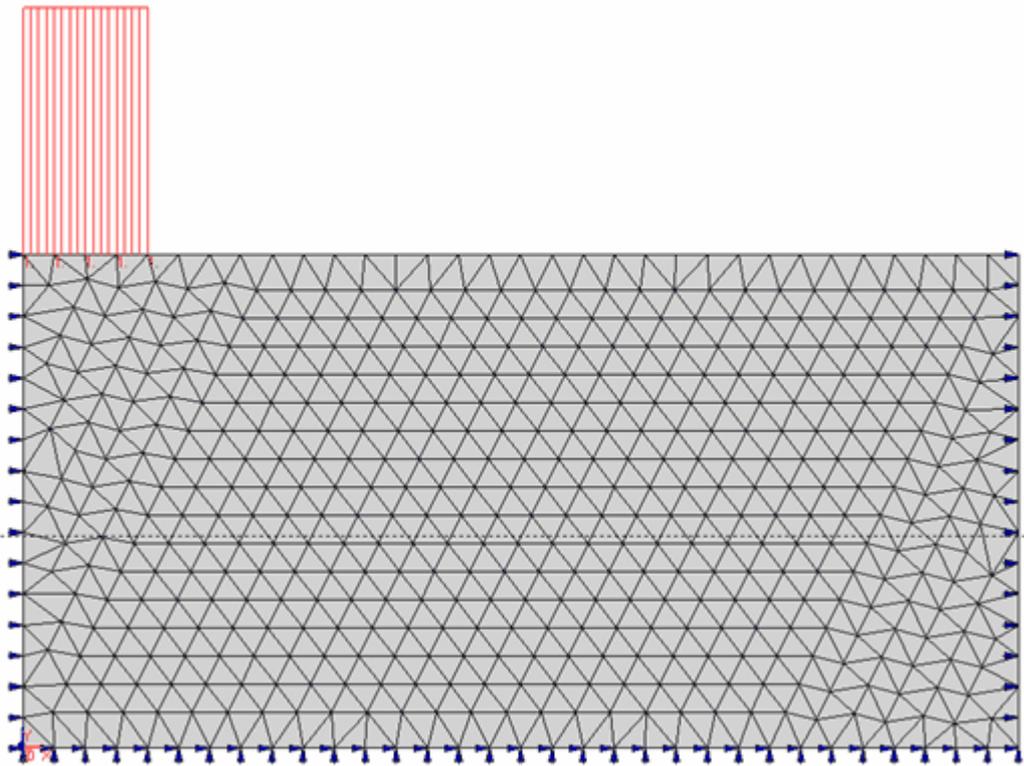


Fig. 62. Mesh dell'esempio di analisi a capacità portante.

E [kN/m ²]	ν	C_u [kN/m ²]
1×10^5	0.3	100

Tabella 10. Proprietà dei materiali

Nella Tabella 11 di seguito, sono stati riportati i valori restituiti dall'analisi a capacità portante eseguita: si vede chiaramente che, per un valore del Fattore di Carico di circa 382 si ottiene uno spostamento che si aggira sui 2.5 cm. Come noto dalla pratica ingegneristica, si può assumere il valore di 2.5 cm come sintomatico della rottura del materiale di cui è costituita la sezione, nonostante il calcolo non abbia fallito la convergenza.

FATTORE DI CARICO	NUMERO DI ITERAZIONI	SPOSTAMENTI [CM]	CONVERGENZA
1	2	0.0043	OK
2	2	0.0087	OK
3	2	0.0130	OK
...	OK
227	2	0.9824	OK
...	OK
282	2	1.2655	OK
...	OK
350	4	1.999	OK
...	OK
381	2	2.4934	OK
382	2	2.5106	OK
383	3	2.5294	OK
...	OK
500	2	5.9279	OK
...	OK
592	7	20.9575	OK
...	OK
604	10	30.5764	OK
...	OK
616	12	46.2047	OK
...	OK
620	200	-	FAILED

Tabella 11. Sintesi dei risultati ottenuti dall'analisi a capacità portante

I carichi sono fattorizzati incrementando il coefficiente di carico da 0.1 ad 1, che corrisponde alla rottura. Ai livelli di carico inferiori a quello di rottura la convergenza si verifica in tempi relativamente brevi e con poche iterazioni. Al collasso, l'algoritmo lavora "di più" e pertanto il calcolo richiede molte più iterazioni.

Al termine dell'analisi GFAS consente di visualizzare la sezione deformata, gli spostamenti in direzione y, gli spostamenti totali e le tensioni xy (Figure 63, 64, 65, 66).

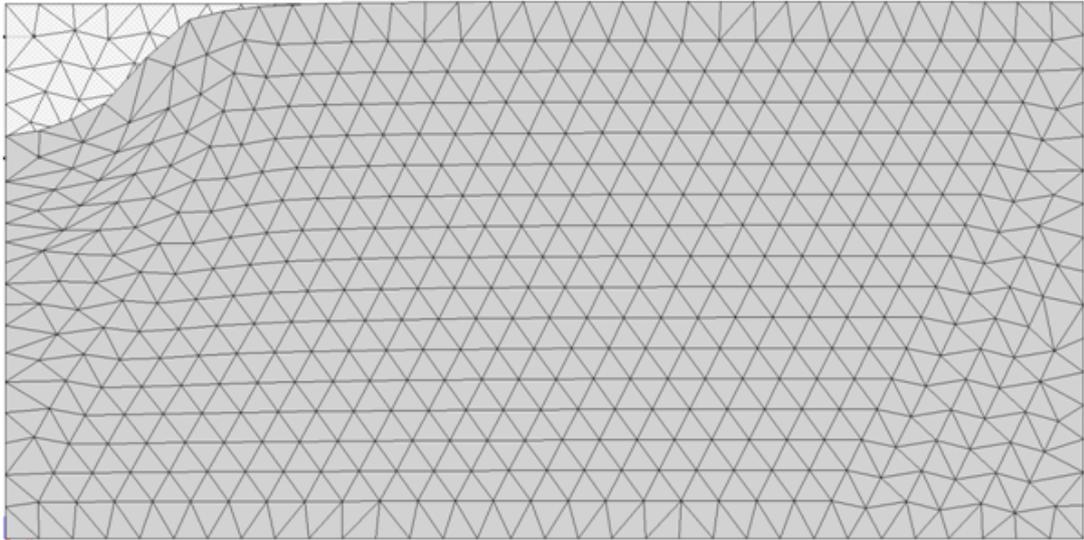


Fig. 63. Mesh deformata



Fig. 64. Spostamenti in direzione y

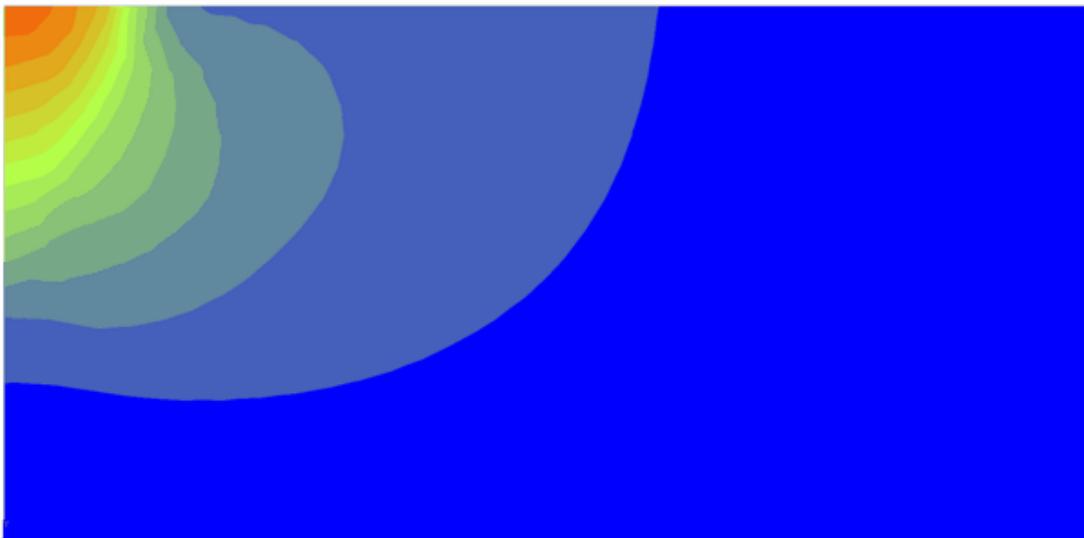
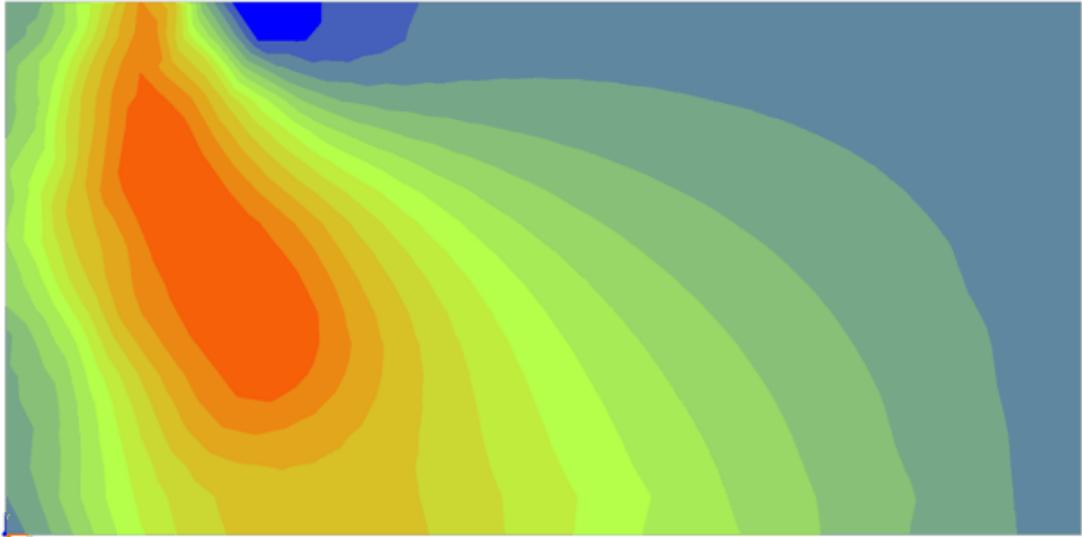


Fig. 65. Spostamenti totali*Fig. 66. Sigma XY*

9.3 Analisi per fasi di costruzione

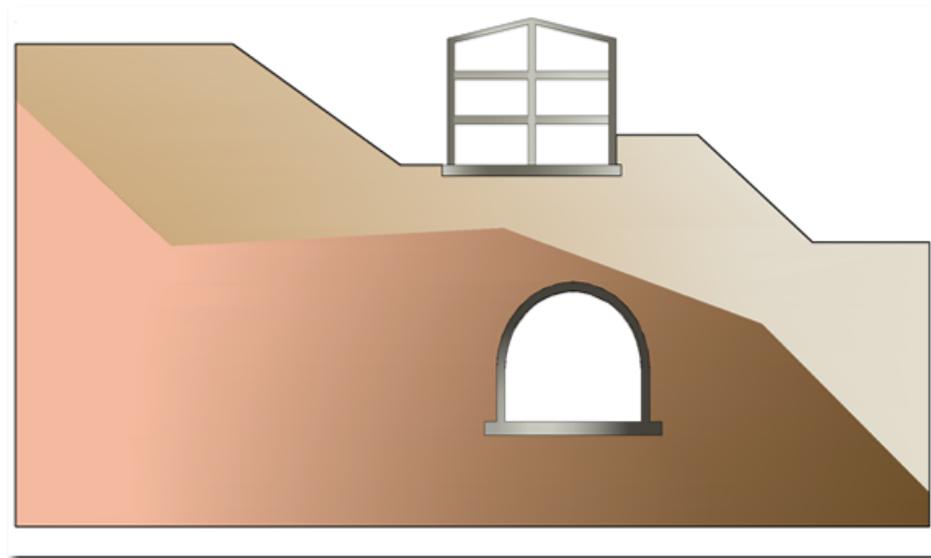
GFAS consente la costruzione di geometrie complesse e l'analisi può essere eseguita in step differenti per ciascuna fase di costruzione. Infatti, l'intera procedura di analisi è sviluppata per consentire all'utente di creare un modello per fasi di costruzione multiple. In questo modo si possono condurre analisi complesse come quelle relative agli scavi, rilevati o costruzioni. Inoltre, ad ogni fase, l'utente ha la possibilità di modificare la pressione neutra, attivare o disattivare gli ancoraggi, gli elementi lineari, le geogriglie oppure le condizioni al contorno a differenti regioni, tutto questo per migliorare la precisione dei risultati che si vogliono raggiungere. La costruzione per fasi consente inoltre di attivare o disattivare i carichi gravitazionali e selezionare le singole componenti del modello come ancoraggi, elementi lineari, geogriglie, carichi, etc. Durante l'analisi per fasi, i carichi vengono incrementati da 0 a 1. Appena il parametro del carico raggiunge il valore di 1.0, gli step della fase corrente sono terminati e si passa quindi alla fase di costruzione successiva. Se il calcolo di una fase di costruzione termina quando il fattore di carico è inferiore ad 1.0, il programma arresta l'analisi. La più probabile ragione dell'arresto è che si sia raggiunta la rottura.

10 Tutorial & DXF

Si riporta una procedura per generare il reticolo di calcolo utilizzando il metodo del reticolo non strutturato.

Per semplicità di esposizione si farà riferimento alla figura seguente che rappresenta il volume di terreno che occorre modellare con **GFAS**.

Il metodo proposto è strutturato nelle seguenti fasi:



1. Costruzione del reticolo di calcolo in Autocad.
2. Realizzazione di un file (*.txt) da importare in **GFAS**.

Nel primo punto specificato si riproduce il volume di terreno che occorre simulare con **GFAS** creando il "reticolo di calcolo", ovvero delle sequenze di nodi che definiscono delle linee chiuse (regioni).

Per le regioni bisogna che:

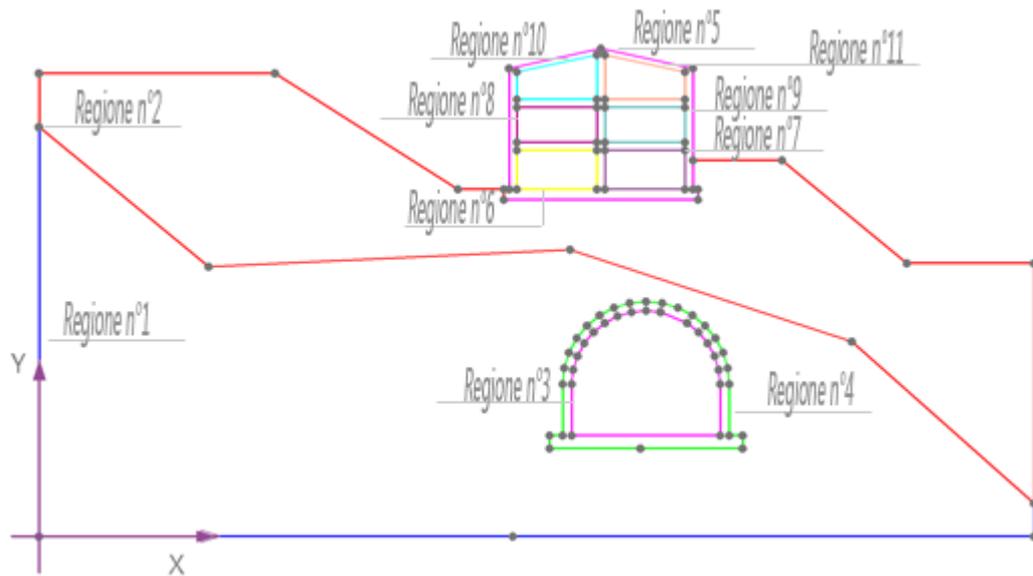
- siano definite da polilinee chiuse,
- i nodi del reticolo coincidano con i vertici delle polilinee.

La sequenza dei nodi deve essere assegnata rispettando le seguenti convenzioni:

- partendo dal basso verso l'alto;
- percorrendo la generica polilinea chiusa con verso antiorario.

La scelta della posizione del sistema di riferimento è arbitraria.

Nell' esempio si è preferito modellare il reticolo di calcolo, vedi figura seguente, con 11 regioni diversificate da colori con lo scopo di renderle riconoscibili. I nodi sono stati contrassegnati con dei pallini grigi, il sistema di riferimento è stato fissato con l'origine coincidente nella posizione del nodo 1 della regione 1.



Il secondo punto si concretizza nella generazione di un file (*.txt) che riporta la struttura di ogni regione: numero identificativo, numero dei nodi della sequenza di cui essa è definita, coordinate di ogni nodo della regione rispetto al sistema di riferimento.

Nel caso specifico, la struttura del file testo (*.txt) è la seguente:

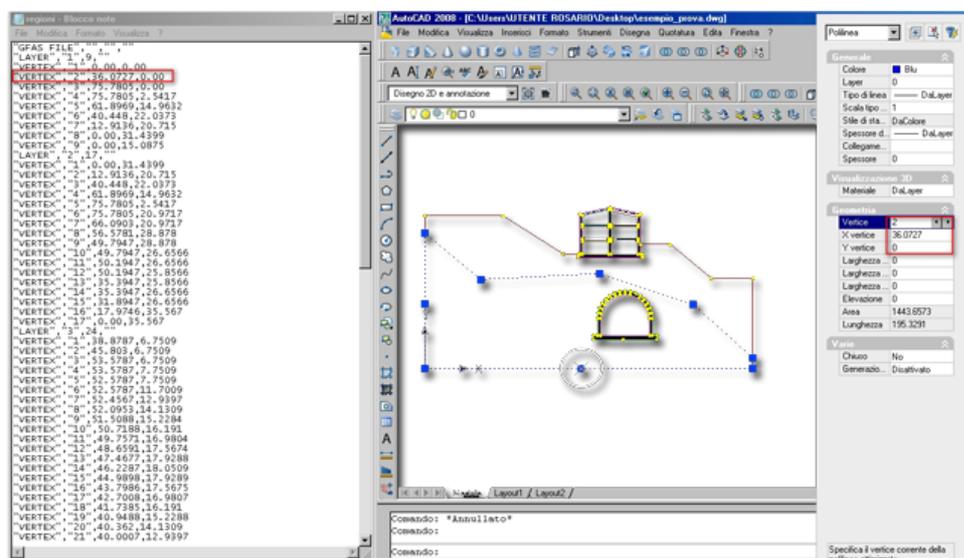
```
"GFAS FILE", "", "", ""           (E' una stringa che ha validità generale,
ogni file *.txt riporta tale sequenza di caratteri)
"LAYER", "1", 9, ""                (indica che la regione 1 è definita da 9
nodi)
"VERTEX", "1", 0.00, 0.00          (da questo punto in poi si riportano le
coordinate dei vertici)
.
.
"VERTEX", "9", 0.00, 15.0875
"LAYER", "2", 17, ""              (designa che la regione 2 è definita da 17
nodi)
"VERTEX", "1", 0.00, 31.4399
.
.
"VERTEX", "17", 0.00, 35.567
"LAYER", "3", 24, ""              (specifica che la regione 3 è definita da 24
nodi)
"VERTEX", "1", 38.8787, 6.7509
.
.
"VERTEX", "24", 38.8787, 7.7509
.....
```

```

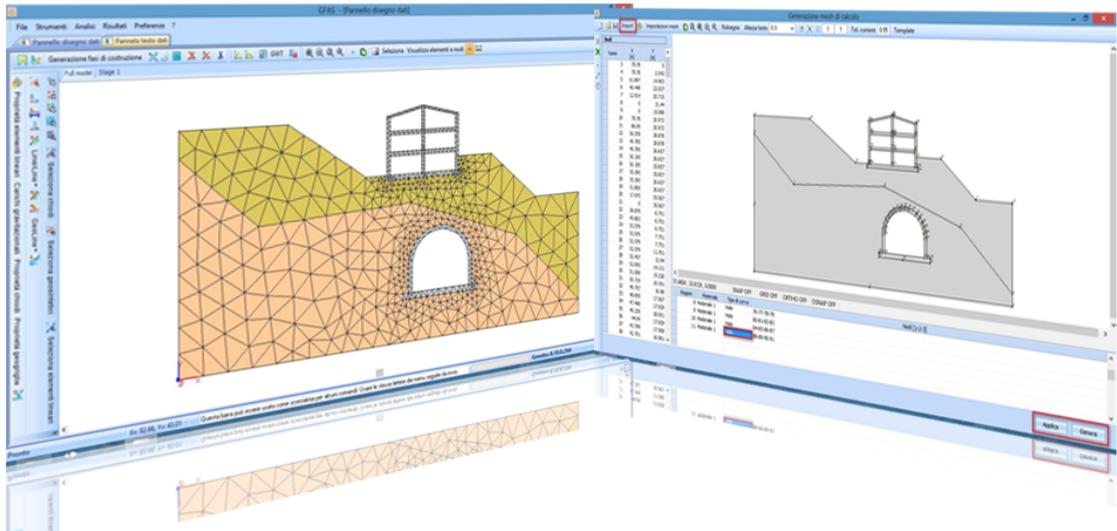
.
.
.....
"LAYER","11",4,"" (denota che la regione 11 è
definita da 4 nodi)
"VERTEX","1",43.0947,33.5566
.
.
"VERTEX","4",43.0947,36.9911

```

In figura è rappresentato l'ambiente di lavoro di Autocad ed evidenziato il punto in cui è possibile leggere le coordinate dei vertici delle polilinee da introdurre nel file testo nominato in precedenza.



In **GFAS**, dall'ambiente "Generazione mesh non strutturata" cliccando sul comando "Importa" è possibile aprire il file (*.txt) creato secondo le indicazioni anzidette. Il risultato del problema analizzato si riporta di seguito: occorre a questo punto assegnare il tipo di curva "interface oppure hole" (se sono previsti dei vuoti si assegna hole). La procedura si conclude selezionando in successione i comandi, *Applica e Genera*, con il click del mouse, da tale operazione verrà generata la mesh di calcolo.



11 Materiali

In **GFAS**, come discusso ampiamente, si possono considerare elementi finiti di vario tipo. Le caratteristiche dei materiali sono quindi suddivise per associazione alla tipologia di elemento finito considerato. In particolare si considereranno:

- Proprietà di materiale associate agli elementi finiti piani;
- Proprietà di materiale associate agli elementi lineari (*beam, truss, ecc.*);

11.1 Il materiale per gli elementi finiti lineari

Per la gestione delle proprietà di materiale associati agli elementi finiti lineari applicare il seguente procedimento:

- 1 Fare click sul pulsante "*Caratteristiche materiale*", posizionato sulla barra degli strumenti di sinistra della finestra di dialogo "*Data panel plot*".



Selezione delle caratteristiche del materiale

2 Sulla finestra di dialogo appena aperta fare click sull'etichetta di controllo "Elementi piani lineari - chiodi" (riquadro in rosso nella figura seguente):



Gestione dei materiali per gli elementi finiti lineari

3 In questo caso le proprietà da impostare sono le seguenti:

#	Name	Colore	Elasticity modulus [kN/mp]	Area [mp]	Inertial moment [m4]	Shear Modulus [kN/mp]	Shear Area [m2]	Density [kN/m3]	Yi
1	Material 1		10000000	0,01	0,000675	3846153,84	3,33333333	25	
2	Material 2		100000	0,01	0,000675	38461,5384	3,33333333	20	

Proprietà dei materiali relativamente ad elementi finiti lineari

In dipendenza dalle proprietà scelte si devono impostare i seguenti parametri:

• Proprietà:

- Nome, è un identificativo del generico materiale e va sempre inserito;
- Colore, necessario per una corretta identificazione grafica del materiale;
- Modulo elastico normale (*anche noto come Modulo di Young*), espresso in kN/m²;
- Area, intesa come area della sezione trasversale dell' elemento, espressa in m²;
- Momento di inerzia della sezione che costituisce l'elemento. Tale momento di inerzia è chiaramente valutato intorno all'asse perpendicolare al piano del disegno. E' espresso in m⁴
- Modulo di taglio, espresso in kN/m²;

- Area a taglio espressa in m^2 ;
- Sforzo di snervamento, espresso in kN. E' quello sforzo in corrispondenza del quale (per compressione o trazione centrata), l'elemento risulta snervato.

11.2 Il materiale per gli elementi finiti piani

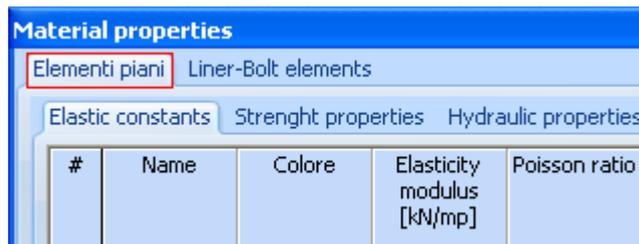
Per la gestione delle proprietà di materiale associati agli elementi finiti piani applicare il seguente procedimento:

- 1 Fare click sul pulsante "Caratteristiche materiale", posizionato sulla barra degli strumenti di sinistra della finestra di dialogo "Data panel plot".



Selezione delle caratteristiche del materiale

- 2 Sulla finestra di dialogo appena aperta fare click sull'etichetta di controllo "Elementi piani" (riquadro in rosso nella figura seguente):



Gestione dei materiali per gli elementi finiti piani

- 3 Sulla finestra di dialogo fare click sul secondo ordine di etichette di controllo (riquadro in rosso nella figura seguente), in dipendenza delle proprietà del materiale da impostare:

Material properties							
Elementi piani Liner-Bolt elements							
Elastic constants Strenght properties Hydraulic properties							
#	Name	Colore	Elasticity modulus [kN/mp]	Poisson ratio	Thickness [m]	Density [kN/m3]	
1	Materaaaial		10000000	0,3	1	25	
2	Material 2		100000	0,3	1	20	

Proprietà dei materiali

In dipendenza dalle proprietà scelte si devono impostare i seguenti parametri:

• Proprietà elastiche:

- Nome, è un identificativo del generico materiale e va sempre inserito;
- Colore, necessario per una corretta identificazione grafica del materiale;
- Modulo elastico normale (anche noto come Modulo di Young), espresso in kN/m^2 ;
- Coefficiente di Poisson, è un numero adimensionale;
- Profondità del dominio di analisi: è la profondità in direzione ortogonale all'area di lavoro;
- Densità del materiale (o meglio peso specifico del materiale), espresso in kN/m^3
- K_0 , coefficiente di spinta a riposo, è un numero adimensionale.

Nota

E' opportuno fare delle specificazioni in merito alla profondità del dominio di analisi, in quanto l'analisi potrebbe essere alterata se per uno stesso dominio di considerano spessori di materiali differenti. Questo parametro è assolutamente necessario quando si esegue un'analisi in "stato piano di tensione", in quanto tale valore entra nella matrice di rigidità dell'elemento. In geotecnica generalmente si usano gli "stati piani di deformazione", dove lo spessore del materiale viene assunto sempre pari all'unità.

• Proprietà di resistenza:

Elastic constants			Strenght properties			Hydraulic properties	
#	Name	Colore	Undrained cohesion [kN/m ²]	Cohesion [kN/m ²]	Friction angle [deg]	Dilation angle [deg]	Failure criteria
1	Material 1		100	15	20	20	Mohr-Coulomb
2	Material 2		100	15	20	20	Mohr-Coulomb

Proprietà di resistenza del materiale

- Coesione non drenata, espressa in kN/m²;
- Coesione, espressa in kN/m²;
- Angolo di attrito interno, espresso in gradi;
- Angolo di dilatanza, espresso in gradi;
- Criterio di rottura, per la caratterizzazione del comportamento del materiale. A proposito del criterio di rottura, GFAS permette di associare il criterio di Mohr-Coulomb, Von-Mises e Drucker-Prager:



Scelta del criterio di rottura

Nota

E' consigliabile, compatibilmente con tutte le altre esigenze di analisi, utilizzare il criterio di rottura di Mohr-Coulomb. Di fatti tale criterio oltre a basarsi su un numero limitato parametri (è richiesto l'angolo di attrito interno e la coesione), è anche tra i più consolidati nella letteratura del settore. Si consideri, inoltre, che i parametri che caratterizzano tale criterio sono tra i più analizzati nel settore dell'ingegneria geotecnica.

• Proprietà idrauliche:

Elastic constants			Strenght properties			Hydraulic properties	
#	Name	Colore	Permeability X [m/s]		Permeability Y [m/s]		
1	Material				1		
2	Material				1		

Proprietà idrauliche del materiale

- Permeabilità in direzione orizzontale, espressa in m/s;

- Permeabilità in direzione verticale, espressa in m/s;

12 Tipo di analisi

In **GFAS** è possibile eseguire diverse tipologie di analisi, prendendo in considerazione diversi modelli di comportamento. E' possibile eseguire:

Analisi lineare

In questo tipo di analisi si ipotizza che tutti gli elementi finiti (siano essi piani o lineari) abbiano un comportamento indefinitamente elastico lineare.

Stato piano di tensione

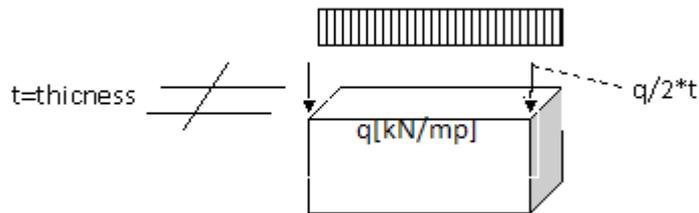
E' caratterizzato da $s_z = 0$ cioè la tensione ortogonale al piano dell'elemento è sempre identicamente nulla e non influenza le altre componenti tensionali e le deformazioni. Gli stati piani di tensione descrivono il comportamento di elementi, quali lastre e piastre, in cui due dimensioni (X, Y) sono di gran lunga maggiori dello spessore (Z), e comunque, le situazioni in cui i due piani paralleli generici che definiscono l'elemento sono indipendenti tra di loro. Un tipico esempio potrebbe essere quello di un muro che, essendo un piano sottile, avrà principalmente tensioni nel piano, ma può deformarsi liberamente.

Stato piano di deformazione

E' caratterizzato da $s_z \neq 0$ dovuto al fatto che le due facce parallele (al piano X,Y) che delimitano gli elementi sono vincolate in direzione Z, pertanto le deformazioni (e_x, e_y, e_{xy}) producono tensioni s_z non nulle per mezzo del coefficiente di Poisson. E' il caso di un lungo muro di sostegno o di una galleria in cui, riferendosi ad una sezione unitaria, i due piani che definiscono il tratto in esame (muro o terreno) non sono liberi di spostarsi in direzione Z poiché vincolati dal muro o dal terreno adiacente. Nell'ipotesi di lunghezza infinita del muro, a geometria e carichi costanti in tutte le sezioni, si ha come conseguenza che due piani generici che sezionano il muro restano fissi prima e dopo l'applicazione del carico: ciò implica deformazione nulla e_z , ma non tensione s_z nulla a causa della contrazione trasversale u .

💡 Nota

La maggior parte dei problemi geotecnici rientrano nello stato piano di deformazione. Per questo tipo di analisi imporre come spessore degli elementi lungo Z paria 1 mt. Nelle analisi a stato piano di tensione assegnare spessori diversi da 1. Tenere presente inoltre che per i carichi distribuiti se lo spessore è diverso da 1 lo spessore $a(t)$ interviene come indicato in figura nella stima dei carichi nodali equivalenti.



💡 Nota

E' da osservare che nella grande maggioranza dei casi GFAS è utilizzato per valutare le risorse ultime contro il collasso di un sistema geotecnico. Se ne conclude che questo tipo di analisi è consigliabile per fare delle stime di massima dei cedimenti e delle tensioni interne, e comunque per problemi a basse deformazioni.

Condizioni di analisi iniziali

Le condizioni iniziali di stress possono essere generati in due modi diversi:

la prima consiste in un'analisi esplicita di stress (Standard Fem) agli elementi finiti, tenendo conto dei carichi gravitazionali, la seconda attraverso il coefficiente di spinta K_0 .

Il metodo K_0 può essere utilizzato solo per geometrie orizzontali e falda in regime stazionario con superficie orizzontale.

Nel caso di elasticità lineare, la relazione tra le sollecitazioni normali è:

$$\sigma_x = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y$$

dove s_x e s_y rappresentano le sollecitazioni laterali e verticali normali e ν è il rapporto di Poisson. Questa equazione può essere riscritta come:

$$\sigma_x = K_0 \sigma_y$$

dove K_0 rappresenta il coefficiente di spinta a riposo. Per simmetria geometrica inoltre:

$$\sigma_x = \sigma_x = K_0 \sigma_y$$

Con le sollecitazioni di taglio pari a zero.

Il coefficiente di spinta a riposo K_0 varia tra 0 e 1. GFAS da la possibilità di scelta del valore di K_0 importante per la generare uno stato iniziale di stress geostatico prima di ogni fase di costruzione.

In contrasto al metodo semplificato K_0 , il calcolo delle sollecitazioni iniziali mediante l'analisi esplicita agli elementi finiti si effettuata su qualsiasi forma geometrica e consente di determinare le tensioni iniziali usando una analisi lineare o elasto-plastico lineare.

Quando si usa la procedura K_0 e più fasi costruttive resettare gli spostamenti a zero per le fasi successive.



Osservazione

Il metodo Standard FEM fornisce soluzioni più accurate per ogni geometria e richiede per la stima corretta dei cedimenti una analisi non lineare.

Il metodo K_0 è più accreditato per la stima dello stress nel sottosuolo e per l'analisi di una capacità portante.

La procedura K_0 è utilizzabile per il calcolo dello stato tensionale non e' idoneo per la stima dei cedimenti.

Analisi non lineare

Questo è il tipo di analisi che senz'altro si adatta meglio a problemi legati alla geotecnica. Sono previste le seguenti tipologie di analisi non lineare:

- Analisi per fasi di costruzione. In questo caso l'evoluzione dell'analisi prende in considerazione tutte le fasi di analisi. Ogni fase risente degli effetti dell'analisi effettuata nella fase precedente (anche a livello di eventuali plasticizzazioni o snervamenti).
- Analisi di capacità portante. In questo caso il carico esterno viene applicato in modo incrementale fino ad una determinata intensità. E' previsto l'utilizzo di diversi criteri di rottura.

- Analisi di stabilità di pendio. Questa tipologia di analisi è utilizzata al fine di valutare il fattore di sicurezza di stabilità di un pendio. In questo caso la procedura di analisi riduce gradualmente le proprietà di resistenza del materiale, fino ad ottenere il collasso della struttura.

Analisi di filtrazione

In questo caso è possibile determinare le proprietà della struttura per quanto riguarda tutte le caratteristiche del moto di filtrazione. È possibile ad esempio valutare la distribuzione delle pressioni neutre sull'intero dominio di analisi.

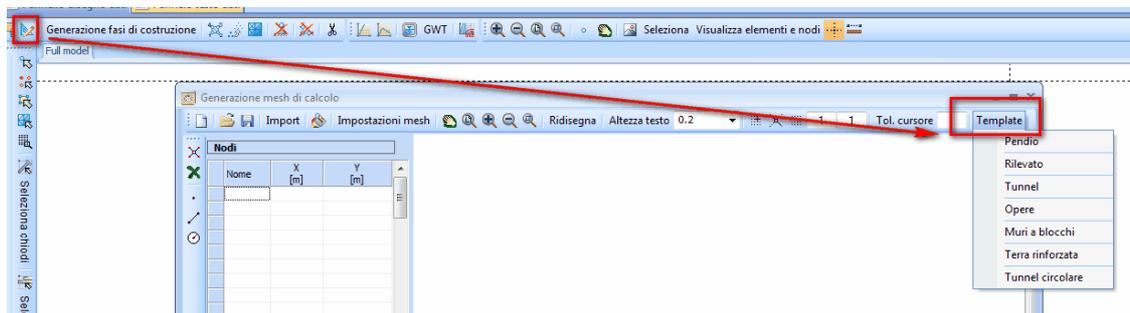
Analisi modale

Vengono determinate le forme modali e gli autovalori associati. Inoltre, sempre per quanto riguarda l'analisi dinamica, vengono determinate le forze inerziali di modello.

13 Template

GFAS dispone di template per facilitare l'input di casi tipo quali: *Slope, Rilevati, Tunnel, Opere di sostegno, Muri a blocchi, Terre rinforzate, Tunnel circolari.*

Per l'elenco dei Template aprire la Window della **Mesh** non strutturata, comando **Template**.



14 Bibliografia

1. Smith, I.M., Griffiths, D.V., Programming the Finite Element Method, John Wiley & Sons, 2004.

2. Akin, J.E., Finite Element Analysis with Error Estimators, Elsevier, 2005.
3. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L, The Finite Element Method, McGraw-Hill, 2000.
4. Cook, R.D, Malkus, D.S., Plesha, M.E., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, 1996.

15 Geoapp

Geoapp: la più grande suite del web per calcoli online

Gli applicativi presenti in [Geostru Geoapp](#) sono stati realizzati a supporto del professionista per la soluzione di molteplici casi professionali.

Geoapp comprende oltre 40 [applicazioni](#) per: Ingegneria, Geologia, Geofisica, Idrologia e Idraulica.

La maggior parte delle applicazioni sono **gratuite**, altre necessitano di una **sottoscrizione** (*subscription*) mensile o annuale.

Perchè si consiglia la subscription?

Perchè una subscription consente di:

- usare applicazioni professionali ovunque e su qualunque dispositivo;
- salvare i file in cloud e sul proprio PC;
- riaprire i file per elaborazioni successive;
- servizi di stampa delle relazioni ed elaborati grafici;
- notifica sull'uscita di nuove applicazioni ed inclusione automatica nel proprio abbonamento;
- disponibilità di versioni sempre aggiornate;
- servizio di assistenza tramite Ticket.

15.1 Sezione Geoapp

Generale ed Ingegneria, Geotecnica e Geologia

Tra le applicazioni presenti, una vasta gamma può essere utilizzata per **GFAS**. A tale scopo si consigliano i seguenti applicativi:

- [GeoStru maps](#)
- [Sistemi reti ancorate](#)

- [Chiodature barre passive](#)
- [Barriere paramassi rigide ed elastiche](#)
- [Tiranti](#)
- [Analisi stabilità di superfici piane](#)
- [Scivolamenti lungo un piano](#)
- [Zone sismogenetiche](#)
- [Mappa dei Rischi dei Comuni Italiani](#)
- [Parametri Sismici PRO](#)
- [Stabilità del terreno - pendio indefinito](#)
- [Analisi di stabilità di superfici piane](#)
- [Carico limite e cedimenti](#)
- [Classificazione suoli NTC2018](#)
- [Classificazione delle terre SMC](#)
- [Paratie](#)
- [Stabilità del terreno - pendio indefinito con rinforzo \(Zornberg\)](#)
- [Tensioni litostatiche](#)
- [Pali e micropali](#)
- [Prove di carico su pali](#)
- [Altezza critica di scavo](#)

16 Libri consigliati

Libri per ingegneria geotecnica e geologia

Portale libri: [consulta la libreria on-line](#)

- **Geotechnical and F.E.M. Analysis System (GFAS)**

[Analisi ad Elementi Finiti in Geotecnica](#) ha lo scopo di introdurre gli utenti al corretto e consapevole uso delle tecniche FEM: nel volume, pertanto, si è cercato di coniugare le nozioni teoriche con gli aspetti pratici con cui quotidianamente un professionista si trova a doversi confrontare.

- **Methods for estimating the geotechnical properties of the soil**

[Methods for estimating the geotechnical properties of the soil:](#) semi-empirical correlations of geotechnical parameters based on in-situ soil tests.

This text is designed for all professionals who operate in the geotechnical subsurface investigation. The purpose of this text is to provide an easy reference tool relatively to the means available today.

Theoretical insights have been avoided, for which please refer to the bibliography attached, except in cases where these were considered essential for the understanding of the formulation. The reason for this is obvious: make the text as easy to read as possible.

After a brief introduction about volumetric and density relationships with the most common definitions used for soils, in the following chapters we briefly described some of the most widespread in situ geotechnical testing and correlations to derive empirically geotechnical parameters and a number of useful formulations available today in the field of Geology.

The text concludes with the inclusion of formulas used in Technical Geology, considered of daily use to those working in the sector.

The topics are intended to provide a basic understanding of the in situ geotechnical testing and evaluation of geotechnical parameters necessary to define the geotechnical model.

● **Guida alla progettazione delle opere di sostegno in terra rinforzata**

[Opere di sostegno in terra rinforzata:](#) Le opere in terra rinforzata e le loro applicazioni rappresentano attualmente una grande risorsa nell'ambito della progettazione e, più in generale, dell'ingegneria geotecnica, naturalistica ed ambientale. Le strutture in terra rinforzata, che combinano le proprietà e le caratteristiche del terreno e del rinforzo, trovano applicazione in una ormai ampia gamma di settori, come opere di sostegno, opere di contenimento, opere in rilevato e opere accessorie di arredo urbano. Pertanto, il manuale 'Guida alla progettazione delle Opere di Sostegno in Terra Rinforzata' si pone come obiettivo quello di guidare il progettista

nella fase della progettazione e di verifica, tramite cenni teorici, riferimenti normativi ed esempi pratici.

● Guida alle analisi di stabilità dei pendii ed alle tecniche di stabilizzazione

Analisi di stabilità dei Pendii e Tecniche di Stabilizzazione: Lo scopo del presente testo non è quello di essere un saggio sui metodi per l'analisi di stabilità dei pendii, né, d'altra parte, un mero "manuale d'uso" per l'utente di un software. Vuole piuttosto essere, come il titolo stesso suggerisce, una sorta di "guida" per il Progettista che, talora, si ritrova di fronte a scelte (circa i modelli, i metodi di analisi, i parametri da utilizzare, ecc.) spesso di non facile interpretazione, stante l'incertezza che, nella maggior parte dei casi, accompagna la definizione del problema dell'analisi di stabilità di un pendio.

● Portanze cedimenti e consolidazione di fondazioni superficiali

Portanza e Cedimenti delle Fondazioni nasce dall'esperienza decennale maturata in ambito geotecnico sia in Italia che all'estero nel settore tecnico ed informatico. Per potenziare la fruibilità del testo viene trattato con dettaglio il quadro normativo italiano ed europeo in cui s'inquadra la progettazione delle fondazioni, dedicando particolare attenzione alle prescrizioni in zona sismica. Sono esposte tecniche e teorie di calcolo con esempi applicati a casi studio mirati a:

- determinazione del carico limite secondo le NTC o Eurocodice,
- interferenza delle fondazioni,
- rotazione e cedimenti differenziali,
- consolidamento con tecniche di rinforzo e micropali.



17 Contatti

Web: www.geostru.eu

Consultare la pagina dei contatti del Sito Web per avere maggiori informazioni sui nostri contatti e sugli indirizzi delle sedi operative in Italia e all' Estero